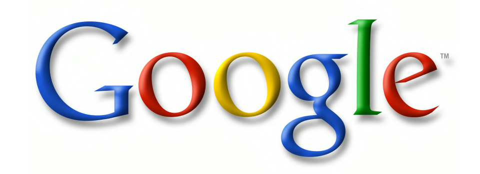
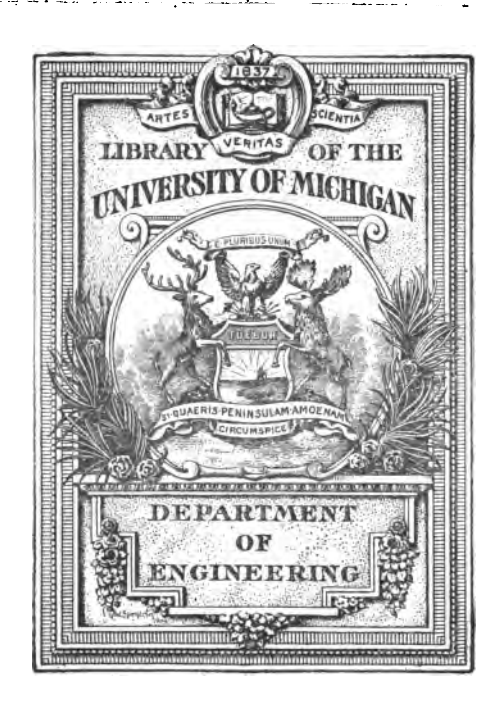
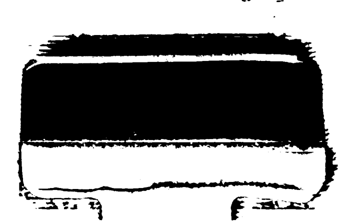
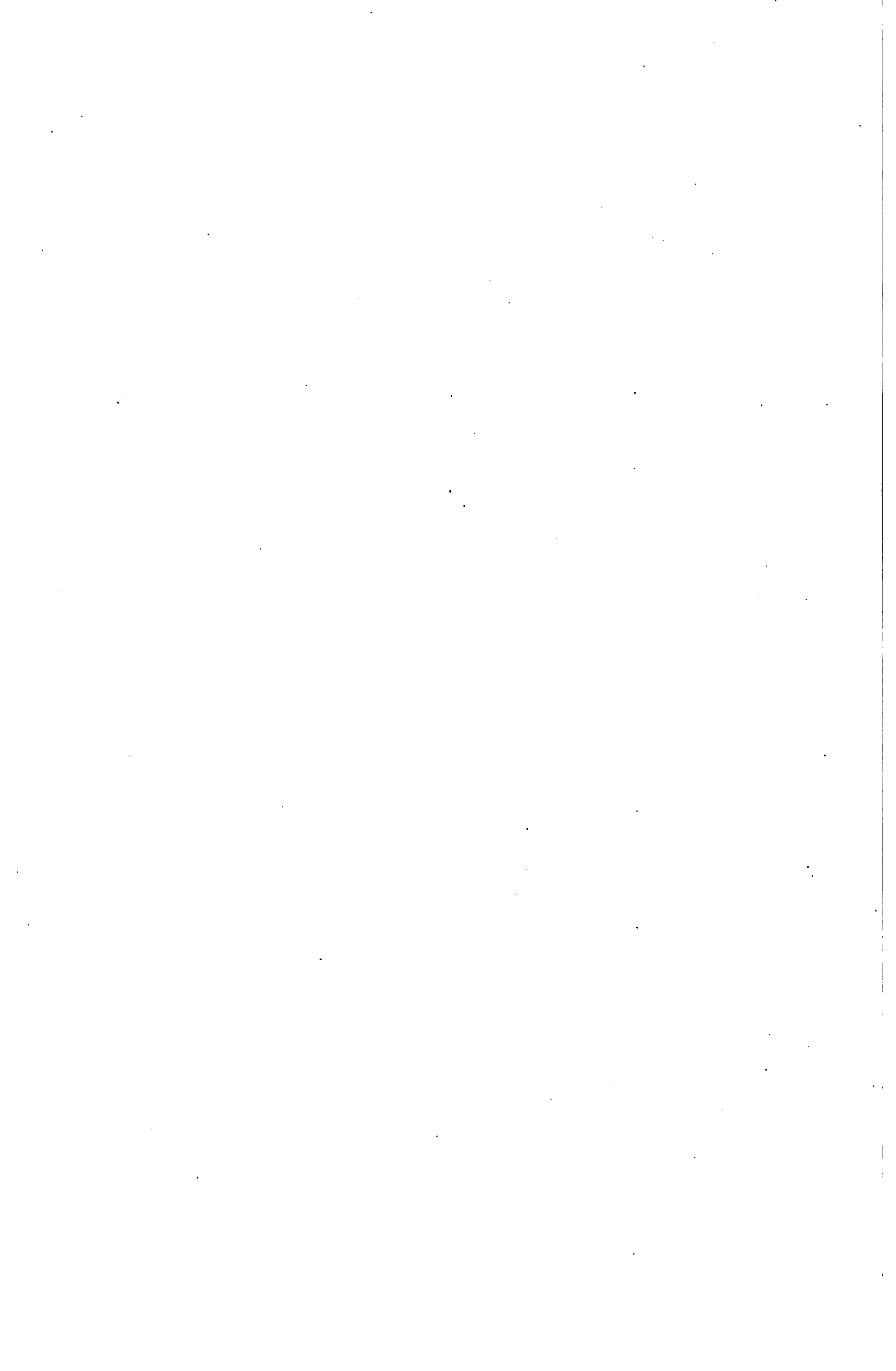



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING





DER

DRUCK AUF DEN SPURZAPFEN

DER REAKTIONSTURBINEN

UND KREISELPUMPEN.

STUDIEN

VON

DR. KARL KOBES,

o. ö. Professor an der Technischen Hochschule Wien.

Mit 68 Abbildungen, davon 33 auf 8 Tafeln.

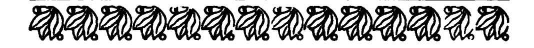
LEIPZIG UND WIEN.

FRANZ DEUTICKE.

1906.

Die Abschnitte I, II, III und V sind umgearbeitete und erweiterte Sonderabdrücke aus der „Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines“, 1906 und 1905.

Die Anordnung von Ausgleichsöffnungen am Orte der größten Umfangsgeschwindigkeit (S. 45, 48, 103) wurde in Österreich und Deutschland zum Patente angemeldet.



Verlags-Nr. 1270.

Vorwort.

Die Darstellung der hydraulischen Teile des Spurdruckes in der Form von Wasserrotationskörpern läßt die Zusammensetzung dieses Druckes in übersichtlicher Weise verfolgen und die Maßnahmen miteinander vergleichen, welche zur Entlastung des Zapfens getroffen werden können.

Diese Art der Darstellung wurde im Abschnitte I auf die Francis-Turbinen mit lotrechter Welle angewendet.

Den Francis-Turbinen mit wagrechter Welle wurde der Abschnitt II zugewiesen. Die horizontale Lage der Rotationsachse forderte hier eine besondere Untersuchung für den hydrostatischen Teil des Zapfendruckes, welcher nach dem Ergebnisse dieser Untersuchung genau so zu ermitteln ist, wie bei der lotrechten Welle.

Den ersten drei Abschnitten, von welchen der III. die Jonval-Turbinen behandelt, liegt die übliche Berechnungsweise zugrunde, von deren Grundgleichung auch ausgegangen wurde, um die Grundzüge der neuen Theorie zu entwickeln, welche den Abschnitt IV einleiten. Auf diesem Wege gelangt man ebenfalls zur allgemeinen Gleichung für das Drehmoment, zu den Strom- und Energieniveauflächen. Die weitere Entwicklung über die Flächenbedingung zur einwandfreien Turbine, für welche der hydraulische Teil des Zapfendruckes ermittelt wurde, erfolgte nach den am Beginne des Abschnittes IV angeführten Arbeiten, auf welche auch sonst häufig verwiesen wurde. Eine weitere Untersuchung über die Reaktion beschließt diesen Abschnitt.

Die Arbeit, welche dem Buche als „Anhang“ beigegeben ist, entstand nach der Veröffentlichung der ersten

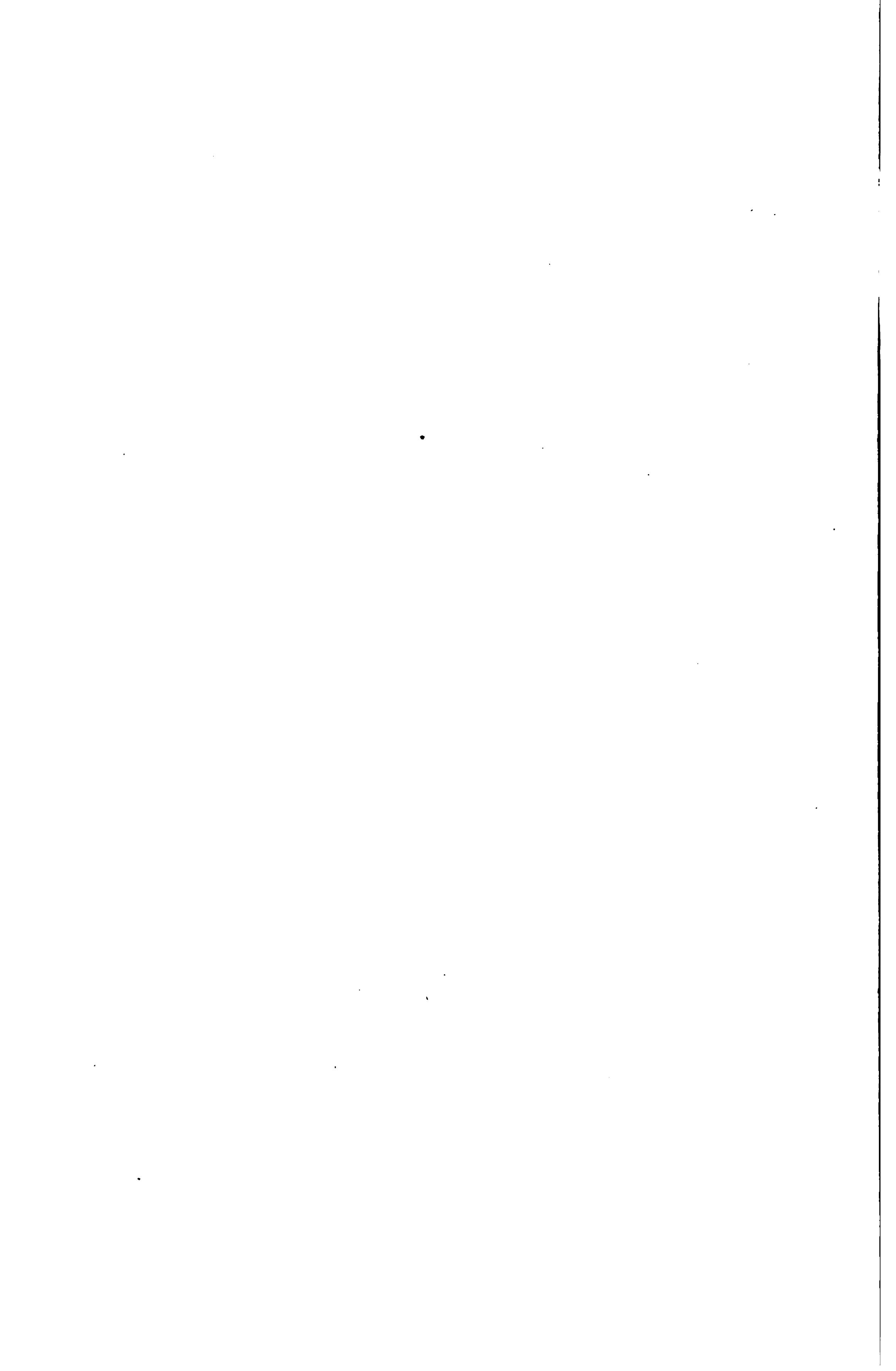
Abhandlungen von Professor Lorenz. Strom- und Energieniveauflächen sind daher noch ohne Rücksicht auf die Flächenbedingung gewählt. Wendet man die neue Theorie auf diesen allgemeinen Laufraddurchschnitt an, so erhält man allerdings auch Schaufelflächen, welche aber die beabsichtigte Wasserbewegung nicht erzwingen. Das Ergebnis hat höchstens den Wert einer beiläufigen Näherung für eine von den unendlich vielen möglichen, aus denselben relativen Wasserwegen bestehenden Schaufelflächen. Von Interesse dürfte die Konstruktion der Stromflächenmeridiane, die Bildung der achsialen Reaktion und die Darstellung der Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse in einem Stromfaden sein. Im übrigen möge dem Abschnitte V nur ein historischer Wert in der Entstehungsfolge der Studien über den Spurdruck beigemessen werden.

Beim Entwurf der Abbildungen unterstützten mich die Herren Assistenten Dr. techn. J. Urbanek (Abschnitte I, II, III) und Ing. E. Wellner (Abschnitte IV, V). Beim Lesen der Korrekturen war auch Herr Konstrukteur Ing. V. Dammer behilflich. Es ist mir eine liebe Pflicht, den genannten Herren an dieser Stelle herzlichst zu danken.

Wien, im Mai 1906.

Prof. Dr. Kobes.

Inhaltsverzeichnis.



I.

Francis-Turbinen mit lotrechter Welle.

A. Druckverhältnisse in einer um eine vertikale Achse rotierenden Wassermasse.

Das Wasser in dem Raume zwischen Gehäuse und Laufrad nimmt an der Umdrehung des letzteren teil. Um die Stetigkeit in der folgenden Zusammensetzung des Zapfendruckes nicht zu stören, sollen die Verhältnisse in jenem Raume zunächst untersucht werden.

Ein vertikaler Kreiszylinder, teilweise mit Wasser gefüllt (Abb. 1), rotiere mit der unveränderlichen Winkelgeschwindigkeit ω um seine geometrische Achse als Rotationsachse. Über dem Wasser laste die Atmosphäre, somit auf jeder Stelle der Oberfläche die Druckhöhe $h_a \doteq 10\,m$. Unter dem Einflusse der Fliehkraft und der Schwerkraft nimmt die freie Oberfläche die Gestalt eines Rotationsparaboloides mit dem Meridian ABC an.[1]) Der Parallelkreis vom Halbmesser ρ liegt in der Höhe

$$\frac{\rho^2\,\omega^2}{2\,g}$$

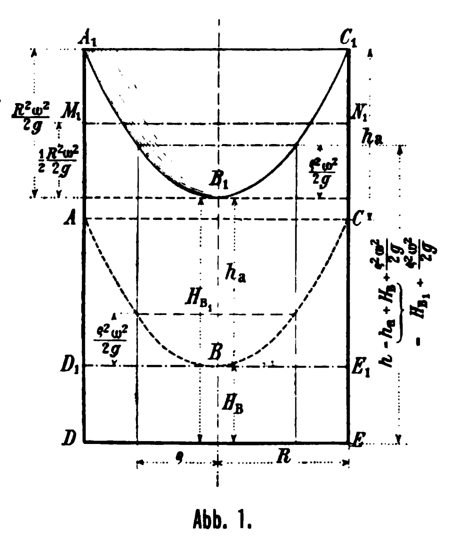


Abb. 1.

über der Scheitelebene des Paraboloides, und es herrscht im Umkreise ρ von der Achse in der Bodenfläche ein Überdruck, welcher durch die Druckhöhe

$$H_B + \frac{\rho^2 \omega^2}{2g},$$

ein absoluter Druck, welcher durch die Druckhöhe

$$h = h_a + H_B + \frac{\rho^2 \omega^2}{2g} = h_a + H_B + \frac{U^2}{2g}$$

gemessen wird; U ist die Umfangsgeschwindigkeit im Kreise vom Durchmesser 2ρ.

Zeichnet man in der Ferne h_a von ABC die kongruente Parabel $A_1 B_1 C_1$ als Meridian eines neuen Paraboloides, so liefern dessen Ordinaten die absoluten Druckhöhen, und es ist gerade so, als ob die Wassermasse bis $A_1 B_1 C_1$ reichen würde und dieses Paraboloid die freie Oberfläche wäre, über welcher dann Luftleere zu denken ist.

Dieses Paraboloid wäre eine Niveaufläche vom absoluten Drucke Null.

Man kann auch schreiben:

$$h = H_{B_1} + \frac{\rho^2 \omega^2}{2g} = H_{B_1} + \frac{U^2}{2g},$$

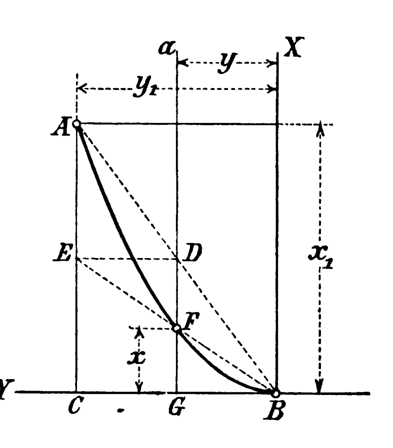
---

[1]) Wenn der Scheitel B und ein Punkt A der Parabel gegeben sind, so kann man die Parabel, etwa wie folgt, konstruieren:

Man zieht AB und AC, dann in beliebiger Entfernung y von der x-Achse die Gerade a; ihren Schnittpunkt D mit AB projiziert man nach E in AC. Im Schnittpunkte F der EB mit a erhält man einen Parabelpunkt.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Parabelgleichung: } y^2 = 2bx, \\ \text{für } A \text{ mit } x_1 y_1\text{: } y_1^2 = 2bx_1,\end{array}\right\}$$

$$\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1}; \quad x = \frac{y^2}{y_1^2} \cdot x_1.$$



Aus der Konstruktion folgt:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBG; \quad y_1 : y = x_1 : \overline{DG},$$

$$\Delta EBC \sim \Delta FBG; \quad y_1 ; y = \overline{EC} : \overline{FG},$$

$$\text{da } \overline{DG} = \overline{EC},$$

$$\text{folgt } y_1^2 : y^2 = x_1 : \overline{FG},$$

$$\overline{FG} = \frac{y^2}{y_1^2} \cdot x_1 = x.$$

wenn man die Scheitelhöhe von B_1

$$h_a + H_B = H_{B_1} \text{ setzt.}$$

$\frac{\rho^2 \omega^2}{2g}$ stellt wieder die Höhe des Parallelkreises vom Halbmesser ρ über der Scheitelebene B_1 vor.

Der **Gesamtdruck auf die Bodenfläche** ist für unseren Fall gegeben durch das Gewicht des Rotationskörpers mit dem Mittelschnitte

$$A_1\, B_1\, C_1\, E\, D\, A_1$$

oder durch das Gewicht des inhaltsgleichen Zylinders

$$M_1\, N_1\, E\, D\, M_1,$$

dessen Höhe gleich ist

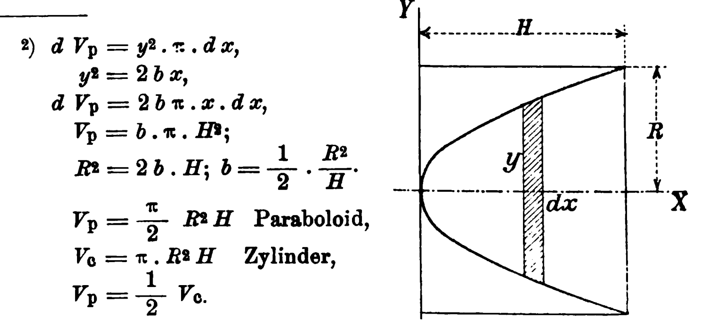
$$\overline{D\, M_1} = H_{B_1} + \frac{1}{2}\, \frac{R^2\, \omega^2}{2g},$$

weil das Paraboloid den Zylinder von gleicher Höhe in zwei inhaltsgleiche Hälften teilt.[2])

Die **Druckverteilung** auf der Bodenfläche ist durch die Ordinaten des Paraboloides $A_1\, B_1\, C_1$ über $D\, E$ gegeben.

Die durch $A_1\, B_1\, C_1$ gegebene Druckverteilung und die Größe des Gesamtdruckes bleiben unverändert auch dann, wenn das Gefäß oben nicht offen, sondern das Wasser durch den Deckel $D_1\, E_1$ in der Höhe $D\, D_1$ über $D\, E$ vollständig abgeschlossen ist. Es ist nur erforderlich, daß an der Stelle B eine Öffnung vorhanden ist, durch welche sich die Druckhöhe h_a über dem Wasser aufrichten kann.

Diese Verhältnisse sind aber auch gültig für ein Gefäß von beliebiger Form,[3]) also auch anwendbar auf den mit Wasser gefüllten, bei B gegen die Luft offenen Rotationskörper mit dem Meridiane $D_1\, B\, E_1\, E\, Q\, D\, D_1$ (Abb. 2, S. 4).



2) $d\, V_P = y^2 . \pi . d\, x,$

$y^2 = 2\, b\, x,$

$d\, V_P = 2\, b\, \pi . x . d\, x,$

$V_P = b . \pi . H^2;$

$R^2 = 2\, b . H;\; b = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{H}.$

$V_P = \frac{\pi}{2}\, R^2 H$ Paraboloid,

$V_C = \pi . R^2 H$ Zylinder,

$V_P = \frac{1}{2}\, V_C.$

3) Grashof, „Theoretische Maschinenlehre" I, 1875, S. 297.

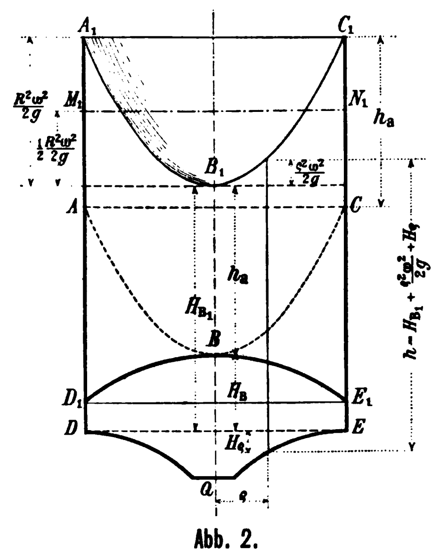


Abb. 2.

Es wäre also z. B. im Umkreise ρ der Bodenfläche, deren Meridian DQE ist, die absolute Druckhöhe

$$\underbrace{h = H_{B_1} + \frac{\rho^2 \omega^2}{2g} + H_\rho}_{\text{über Ebene } DE.}$$

Der Gesamtdruck auf die Bodenfläche DQE wäre gegeben durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers

$$A_1 B_1 C_1 E Q D A_1,$$

bezw. des Rotationskörpers

$$M_1 N_1 E Q D M_1,$$

wenn man den über Ebene ED gelegenen Teil wie früher in einen Zylinder verwandelt.

Diese bekannten, meist in anderer Form gegebenen Betrachtungen sollen nunmehr eine Erweiterung erfahren.

Wir denken uns den allseits geschlossenen Zylinder $D_1 E_1 E D D_1$ (Abb. 3, S. 6) voll mit Wasser gefüllt. Über dem Zylinder lassen wir zur übersichtlichen Darstellung der Druckverhältnisse einen Schacht frei. Durch einen Ringspalt DGE oder durch eine zentrale Öffnung J kann dieser Zylinder $D_1 E_1 E D D_1$ mit einem Raume in Verbindung gebracht werden, in welchem in der Höhe der Bodenfläche DE ein durch die Druckhöhe h_1 gemessener absoluter Druck herrscht. Man kann sich zu diesem Zwecke vorstellen, daß außerhalb des zylindrischen Schachtes bis zur Höhe h_1 über Ebene DE Wasser ansteht, über welchem wegen der absoluten Druckmessung Luftleere vorhanden wäre.

Ringspalt DGE.

Öffnet man nun z. B. den Ringspalt DGE (Abb. 3, S. 6) bei dem noch nicht rotierenden Zylinder, so kann natürlich kein Wasser eintreten, weil der Zylinder $D_1 E_1 E D D_1$ voll mit Wasser gefüllt ist; es wird sich aber in der ganzen Ausdehnung der Bodenfläche DE die absolute Druckhöhe h_1 einstellen, und es ist somit für die Druckverteilung und den Gesamtdruck auf die Bodenfläche gerade so, als ob der Deckel $D_1 E_1$ weg wäre und das Wasser durch DGE bis zur Höhe h_1 einfließen könnte; außen und innen stünden die unter dem absoluten Drucke Null befindlichen Wasserspiegel gleich hoch bis zur Ebene WW.

Nun beginne die Wassermasse im zylindrischen Schachte um die geometrische Achse des Zylinders als Rotationsachse zu rotieren. Wäre DGE geschlossen, so würde sich die freie Oberfläche im Beharrungszustande bei der Winkelgeschwindigkeit ω nach dem Paraboloide $A_0 B_0 C_0$ einstellen ($A_0 C_0$ so weit über WW als B_0 unter dieser Ebene).

Diese Lage kann bei geöffnetem Spalte DGE nicht bestehen bleiben, weil der äußeren Druckhöhe h_1 im Spalt die innere Druckhöhe $\overline{A_0 D}$ entgegenstehen würde; es wird somit infolge des Druckhöhenunterschiedes Wasser aus dem Schachte so lange verdrängt, bis sich das Paraboloid über der Druckhöhe h_1 in der Gleichgewichtslage $A_1 B_1 C_1$ eingestellt hat.

Es rechnet sich die Höhe des Scheitels B_1 über Ebene DE aus

$$h = H_{B_1} + \frac{\rho^2 \omega^2}{2g};$$

für $\left.\begin{array}{l}\rho = R \\ h = h_1,\end{array}\right\}$ wird also $H_{B_1} = h_1 - \frac{R^2 \omega^2}{2g}$.

Zentraler Ausgleich bei J.

Schließt man DGE, und öffnet man J (Abb. 3, S. 6), so wird sich wie früher im Schacht das Wasser bis zur Ebene WW einstellen. Leitet man wieder die Rotation ein, so wird sich im Beharrungszustande bei der Winkelgeschwindigkeit ω die freie Oberfläche wieder nach $A_0 B_0 C_0$ einstellen, wenn man vor Beginn der Rotation J geschlossen hat. Bei geöffnetem J ist diese Lage nicht möglich, weil der äußeren Druckhöhe h_1 in J die kleinere innere Druckhöhe $\overline{JB_0}$ entgegenstehen würde.

Das Paraboloid wird seine Gleichgewichtslage aufsuchen, welche erreicht ist, wenn die Druckhöhe in J auch innen gleich h_1 geworden ist; es wird also durch J so lange Wasser zufließen, bis der Scheitel des Paraboloides in B_2 um h_1 über J angelangt ist.

Die absolute Druckhöhe über der Ebene DE im Parallelkreise $A_2 C_2$ vom Halbmesser R rechnet sich aus:

$$h = H_{B_2} + \frac{\rho^2 \omega^2}{2g}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{mit } H_{B_2} = h_1 \\ \text{und } \rho = R\end{array}\right\} h_{A_2} = h_1 + \frac{R^2 \omega^2}{2g}.$$

Würde die Zylinderwand nicht bis zur Höhe $A_2 C_2$ reichen, so müßte ununterbrochen Wasser über den unter $A_2 C_2$ liegenden Rand fließen, weil die Gleichgewichtsstörung

bestehen bleibt, da sich innen über J nicht die Höhe h_1 einstellen kann.[4])

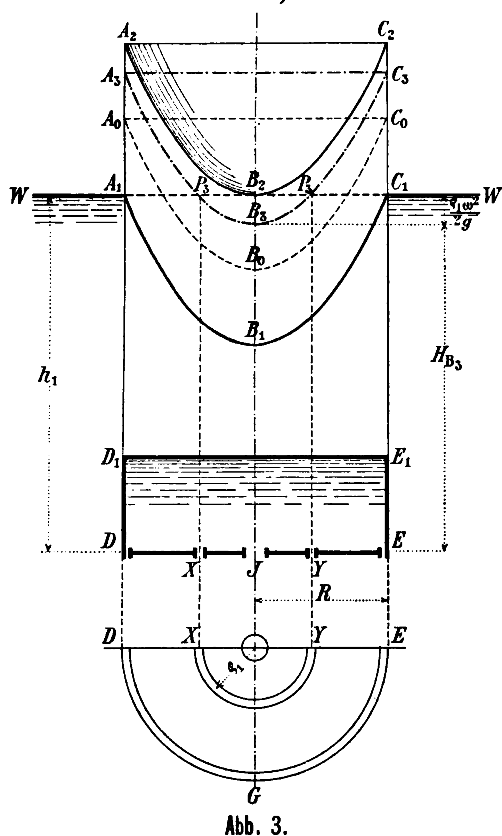


Abb. 3.

Kehren wir nun wieder zu unserem geschlossenen Zylinder $D_1\,E_1\,E\,D\,D_1$ zurück, so bestimmen die Paraboloide $A_1\,B_1\,C_1$ (Fall Ringspalt), bezw. $A_2\,B_2\,C_2$ (zentraler Ausgleich) die Druckverteilung und den Gesamtdruck auf die Bodenfläche $D\,E$ des geschlossenen Zylinders.

Der Deckel $D_1\,E_1$ erfährt einen Druck nach aufwärts, der gegeben ist durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers $A_1\,B_1\,C_1\,E_1\,D_1\,A_1$, bezw. $A_2\,B_2\,C_2\,E_1\,D_1\,A_2$. Die Druckverteilung auf den Deckel ist bestimmt durch die zwischen dem Paraboloide $A_1\,B_1\,C_1$, bezw. $A_2\,B_3\,C_2$ und der Deckelebene $D_1\,E_1$ gelegenen Ordinaten. Die Verwandlung der Paraboloide in Zylinder zur einfacheren Bestimmung des Gesamtdruckes hat wie früher zu erfolgen.

Die Paraboloide $A_1\,B_1\,C_1$ und $A_2\,B_2\,C_2$ stellen für eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit ω Grenzlagen vor.

Zwischen beiden liegen alle Paraboloide für die Fälle, bei welchen der Durchmesser des Ringspaltes kleiner ist als $2\,R$.

Je weiter der Ausgleich außen erfolgt, desto tiefer liegen die Paraboloide; sie rücken umso höher, je näher der Ausgleich an der Achse.

Für den Ringspalt $X\,Y$ vom Durchmesser $2\,\rho_1$ (Abb. 3) ergibt sich z. B. das Paraboloid $A_3\,B_3\,C_3$, und zwar erhält man zwei Punkte $P_3\,P_3$ seines Meridians in der Höhe h_1 über X, bezw. Y. Durch die beiden Punkte $P_3\,P_3$ ist eine

[4]) Dieser Hinweis findet sich auch in: Keck, Vorträge über Mechanik, 2. Bd. 1897. S. 200. Ich wurde erst nach Vollendung der Arbeit darauf aufmerksam.

zu den vorhandenen kongruente Parabel zu zeichnen. Gerechnet könnte die Lage des Scheitels werden aus

$$h = H_{B3} + \frac{\rho^2 \omega^2}{2g};$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } \rho = \rho_1 \\ \text{wird } h = h_1,\end{array}\right\} h_1 = H_{B3} + \frac{\rho_1^2 \omega^2}{2g},$$

$$H_{B3} = h_1 - \frac{\rho_1^2 \omega^2}{2g}.$$

Folgerungen.

α) Vergleicht man bei gegebenem h_1 und ω (Abb. 3, S. 6) die beiden Grenzlagen, so erkennt man, daß der Druck auf die Bodenfläche beim zentralen Ausgleiche einen Größtwert, beim Ausgleiche am äußeren Umfange einen Kleinstwert erreicht.

β) Ist die Verbindung der beiden Räume (Abb. 4) nur durch den äußeren Ringspalt DGE möglich ($A_1 B_1 C_1$), so kann man bei gegebenem h_1 eine Entlastung des Bodens durch Vergrößerung der Winkelgeschwindigkeit erzielen.

Macht man z. B.

$$\omega_1 = 2\,\omega,$$

so sinkt der Scheitel nach B'_1, und seine Tiefe unter der Ebene WW ist gegeben durch

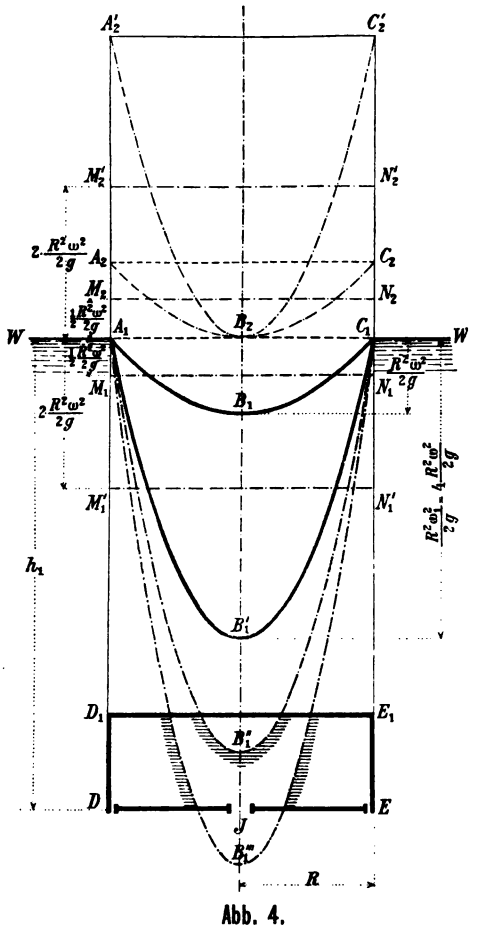


Abb. 4.

$$\frac{R^2 \omega_1^2}{2g} = 4 \cdot \frac{R^2 \omega^2}{2g},$$

er liegt also in der vierfachen Tiefe von B_1 unter WW.

Damit wird auch der Inhalt des Paraboloides $A_1\, B_1'\, C_1$ viermal so groß als jener des Paraboloides $A_1\, B_1\, C_1$.

Bodendruck bei ω: Gewicht des Wasserzylinders $M_1 N_1 E D M_1$.

Bodendruck bei $\omega_1 = 2\,\omega$: Gewicht des Wasserzylinders $M_1' N_1' E D M_1'$.

Dieses letztere ist um das dreifache Gewicht des Wasserparaboloides $A_1 B_1 C_1$ kleiner als das erstere; das ist um

$$3 \,.\, R^2 \pi \,.\, \frac{1}{2} \, \frac{R^2 \omega^2}{2g} \,.\, \gamma = \frac{3\pi}{4} \,.\, \frac{\gamma}{g} \,.\, R^4 \omega^2 \; kg.$$

In der Gleichung ist

$$R \text{ in } m,$$
$$\gamma = 1000 \; kg/m^3,$$
$$g = 9{\cdot}81 \; m/\text{Sek.}^2$$

einzusetzen.

Bei weiterer Steigerung der Winkelgeschwindigkeit (Paraboloide $A_1 B_1'' C_1$ und $A_1 B_1''' C_1$) entsteht im Innern des Zylinders $D_1 E_1 E D D_1$ ein luftleerer druckloser Raum.

γ) Ist der Ausgleich nur durch die zentrale Öffnung J möglich ($A_2 B_2 C_2$), Abb. 4 (S. 7), dann wäre die Vergrößerung der Winkelgeschwindigkeit zum Zwecke der Bodenentlastung eine verfehlte Maßregel ($A_2' B_2 C_2'$ gegen $A_2 B_2 C_2$). Eine Entlastung kann nur durch Verkleinerung der Winkelgeschwindigkeit erfolgen. Der Grenzwert würde bei $\omega = 0$ erreicht. Das Gewicht des Wasserzylinders $A_1 C_1 E D A_1$ würde dann den Bodendruck geben.

Dieser wäre gegenüber der Rotation mit ω kleiner um

$$R^2 \pi \,.\, \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 \omega^2}{2g} \,.\, \gamma = \frac{\pi}{4} \,.\, \frac{\gamma}{g} \, R^4 \omega^2 \; kg.$$

Die Größen sind wie oben einzusetzen.

δ) Ist man in der Anordnung der Ausgleichsöffnung an eine bestimmte Stelle nicht gebunden, so ist sofort zu erkennen, daß man zum Zwecke einer möglichst großen Entlastung den Ausgleich außen im Kreise DE und nicht zentral herbeiführen wird. Das Paraboloid sinkt von $A_2 B_2 C_2$ nach $A_1 B_1 C_1$; kann man außerdem noch die Winkelgeschwindigkeit vergrößern, so wird die größte Entlastung erreicht. Die Lage des Paraboloides ist dann durch $A_1 B_1' C_1$ gegeben.

Die folgenden Untersuchungen werden zeigen, wie diese Schlüsse für die Francis-Turbine nutzbar gemacht werden können.

An den Untersuchungen und deren Ergebnissen wird nichts geändert, wenn an die Stelle des Zylinders $D_1 E_1 E D D_1$ der Abb. 3 (S. 6) und 4 (S. 7) der Rotationskörper $D_1 E_1 E Q D D_1$ der Abb. 2 (S. 4) tritt und über der Ebene DE außen die Druckhöhe h_1 ansteht. Der achsiale Druck auf die Bodenfläche ist durch das Gewicht des Wasserkörpers bestimmt,

welcher durch eines der Paraboloide oben, durch die Rotationsfläche $D\,Q\,E$ unten und seitlich durch den Zylindermantel begrenzt ist.

Die absolute Druckhöhe an irgend einer Stelle des Bodens ist gegeben durch die Vertikale zwischen Paraboloid und Rotationsfläche an der betreffenden Stelle.

B. Zusammensetzung des Druckes auf den Spurzapfen.

Um das Verfahren übersichtlich entwickeln zu können, sei eine große Turbine normaler Bauart ohne Ausgleichsöffnungen vorausgesetzt. Die Welle gehe in gleicher Stärke durch das Wasser, ein Glockenzapfen übertrage die achsiale Last auf die Spur, von den Halslagern sei das unterste knapp oberhalb des Laufrades im Deckel angeordnet. Eine geringe Überschreitung des üblichen Verhältnisses zwischen D_1 und D_3 läßt auch die Vorgänge im Raume S_2 deutlich verfolgen. (Bezeichnungen nach Textabb. 5 und Abb. 6 auf Tafel I.)

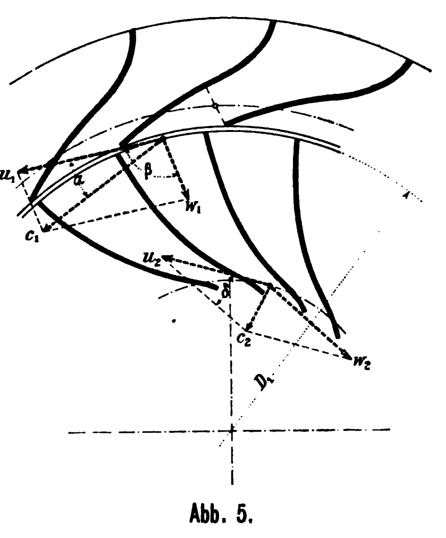


Abb. 5.

Das Verfahren erfordert die Aufzeichnung eines maßstabrichtigen Bildes der Anordnung.

Dieses sei durch die Abb. 6 (Taf. I) dargestellt, nach welcher für die Turbine folgende Verhältnisse gelten würden:

$H = 7{\cdot}0\,m$ für die Turbine verfügbares Gefälle,

$Q = 9{\cdot}7\,m^3/\text{Sek.}$ Wassermenge in der Sekunde;

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle\,\alpha = 25^0\\ \sphericalangle\,\beta = 90^0\end{array}\right\}$ angenommen (Abb. 5),

folgen mit einem hydraulischen Wirkungsgrade

$$\eta \backsim 0{\cdot}84$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{\eta}{2}} \cdot \sqrt{2\,g\,H} = 0{\cdot}65\,\sqrt{2\,g\,H} = 7{\cdot}6\,m/\text{Sek.},$$

$$c_1 = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\eta}{2}} \cdot \sqrt{2\,g\,H} = 0{\cdot}716\,\sqrt{2gH} = 8{\cdot}4\,m/\text{Sek.}$$

Die Überdruckhöhe im Spalt gegenüber dem absoluten Drucke im Saugrohr in gleicher Höhe wird mit einem Widerstandskoeffizienten für die Strecke bis zum Ausflusse aus dem Leitrade

$$\xi_0 \backsim 0{\cdot}11$$

$$h_p = H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g} = 0{\cdot}43 . H = 3{\cdot}0 \, m.$$

Ferner folgt

$$D_1 = 2{\cdot}4 \, m \quad \text{und} \quad b_1 = 0{\cdot}4 \, m.$$

Die Umlaufzahl in der Minute wäre:

$$n = 60{\cdot}5.$$

Mit einem mechanischen Wirkungsgrade

$$\eta_e \backsim 0{\cdot}80$$

ergibt sich eine effektive Leistung von

$$N_e = 725 \, PS_e.$$

Der erforderliche Wellendurchmesser rechnet sich mit

$$d = 220 \, mm \; \left(d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \, cm\right).$$[5]

Die Teile, aus welchen sich der Druck auf den Spurzapfen zusammensetzt, sind die folgenden:

a) Der hydrostatische Teil, herrührend von den Druckdifferenzen in den äußeren Laufradbegrenzungen samt dem Gewichte des Wassers im Laufrade.

b) Der hydrodynamische Teil, herrührend von der Wasserbewegung im Laufrade, bekannt als achsiale Reaktion.

c) Die Gewichtsanteile des Laufrades, der Welle und der sonstigen Bauteile, welche mit der Welle verbunden sind.

d) Die von der Übertragung herrührenden achsialen Kräfte.

a. Der hydrostatische Teil des Zapfendruckes.

1. Der Druck auf das Laufrad, herrührend von der Pressung im Raume S_1.

Bezeichnet man mit h_a die Druckhöhe der Atmosphäre in Metern Wassersäule, so ist in der mittleren Ebene *EE* (Abb. 6, Taf. I) die absolute Spaltdruckhöhe gemessen durch

$$h_1 = h_a - (H_u + H_r) + H - (1 + \xi_0) \frac{c_1^2}{2g}.$$

---

[5] Freytag: „Hilfsbuch für den Maschinenbau“ 1906, S. 198. Hiezu Bach: „Die Maschinenelemente“ 1903, S. 494.

Setzt man

$$h_p = H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g},$$

so ist

$$h_1 = h_a - (H_u + H_r) + h_p;$$

h_p ist durch die Annahme der Winkel α und β bestimmt.

Trägt man über dem Unterwasserspiegel (*U. W.*) die Druckhöhe der Atmosphäre

$$h_a = 10\,m$$

im Maßstabe der Abbildung auf, so erhält man gleichsam einen neuen Wasserspiegel $O\,O$; zwischen diesem und der Ebene $E\,E$ ergibt sich

$$h_a - (H_u + H_r).$$

Setzt man über $O\,O$ noch h_p an, so erhält man die Ebene $E_1 E_1$ und

$$h_1 = h_a - (H_u + H_r) + h_p.$$

Da nach der Voraussetzung Ausgleichsöffnungen nicht vorhanden sind, so steht das Wasser im Raume S_1 unter dem Spaltdrucke.

Würde dieses Wasser in Ruhe verharren, so gäbe das Gewicht des Wasserkörpers, welcher oben vom Kreise $A_1\,C_1$, unten von der oberen Laufradfläche und seitlich von der Zylinderfläche vom Durchmesser D_1 begrenzt ist, und aus welchem ein zylindrischer Kern vom Durchmesser der Welle herausfällt, bereits den nach abwärts wirkenden Druck.

Da das Wasser im Raume S_1 vom Rade mitgenommen wird, so entsteht eine andere Druckverteilung.

Bezeichnet

ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades,
Ω die Winkelgeschwindigkeit des Wassers im Raume S_1,
U die Umfangsgeschwindigkeit des Wassers im Raume S_1,

so liegt, wenn wir annehmen, daß

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot \omega \text{ [6])}$$

ist, der Scheitel des Rotationsparaboloides $A_1\,B_1\,C_1$ um

$$\frac{R_1^2\,\Omega^2}{2g} = \frac{U_1^2}{2g} = \frac{1}{4} \cdot \frac{u_1^2}{2g}$$

unter der Ebene $A_1\,C_1$, wobei

U_1 die Umfangsgeschwindigkeit des Wassers,
u_1 die Umfangsgeschwindigkeit des Rades
} im Kreise vom Durchmesser $2\,R_1 = D_1$ ist.

---

[6]) Pfarr, Hütte I. 19. Aufl. S. 883. Das Verfahren ändert sich natürlich nicht, wenn Versuche ergeben sollten, daß $\Omega \gtrless \frac{\omega}{2}$ ist.

Für unsere Turbine wäre:

$$\overline{ZB_1} = \frac{U_1{}^2}{2g} = \frac{1}{4} \cdot \frac{u_1{}^2}{2g} = \frac{1}{4} \cdot \frac{7{\cdot}6^2}{2 \,.\, 9{\cdot}81} = 0{\cdot}74 \, m.$$

Damit ist der Scheitel B_1 des Paraboloides bestimmt. (Vergleiche hiezu S. 4, „Ringspalt“).

Es ist somit der auf das Laufrad nach abwärts wirkende Druck gegeben durch das Gewicht des mit Wasser gefüllten Rotationskörpers, dessen Mittelschnitt in der linken Hälfte der Abb. 6 (Taf. I) rechts ansteigend weit schraffiert ist.

Dieser Rotationskörper ist oben durch das Paraboloid $A_1 B_1 C_1$, unten durch die obere Laufradfläche und seitlich durch den Zylindermantel vom Durchmesser D_1 begrenzt. Der zylindrische Kern vom Durchmesser der Welle fällt heraus.

2. Das Gewicht des Wassers im Laufrade.

Denken wir uns das ganze Laufrad, Nabe, Boden, Kranz und Schaufeln auch aus Wasser, so erhalten wir mit dem Gewichte des Wassers im Rade einen Wasserrotationskörper, dessen Mittelschnitt in der linken Hälfte der Abb. 6 (Taf. I) rechts ansteigend enger schraffiert ist.

Das Gewicht dieses Körpers ist dem zuerst ermittelten hinzuzufügen, so daß somit der gesamte nach abwärts wirkende Druck gegeben ist durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers, welcher zwischen dem Paraboloide $A_1 B_1 C_1$ und der unteren Begrenzungs- und Austrittsfläche des Laufrades $\sigma_2 \, \sigma_3$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\sigma_3 \, \sigma_2$ gegeben ist. Der zylindrische Kern vom Durchmesser der Welle ist herauszunehmen.

Vorzumerken ist jedoch, daß das Gewicht des ganzen Laufrades noch mit einem spezifischen Gewichte gleich dem Unterschiede zwischen dem spezifischen Gewichte des Radmateriales und dem des Wassers zu berücksichtigen ist.

3. Der auf die Austrittsrotationsfläche und auf die untere Begrenzungsfläche des Laufrades nach aufwärts wirkende Druck.

Zunächst sollen die nach dem Saugrohre gekehrten Teile der Unterfläche mit dem Meridiane *1, 2, 3, 4, 5, 6* vorgenommen werden (Abb. 6, Tafel I).

Fassen wir den Parallelkreis *M M* der mittleren Stromfläche ins Auge, so ist die absolute Druckhöhe in demselben gegeben durch

$$h_2 = h_a - H_u - \frac{c_2{}^2 - c_3{}^2}{2g} + \xi_3 \cdot \frac{c_3{}^2}{2g},$$ [7])

[7]) Aus $\frac{c_3{}^2}{2g} + h_a + H_A = \frac{c_2{}^2}{2g} + h_2 + H_u + H_A - \xi_3 \cdot \frac{c_3{}^2}{2g}.$

wenn wir unter

c_2 die absolute Austrittsgeschwindigkeit aus dem Laufrade,
c_3 die absolute Austrittsgeschwindigkeit aus dem Saugrohre,
ξ_3 den Widerstandskoeffizienten für das Saugrohr

verstehen wollen.

Setzt man

$$\frac{c_2^2 - c_3^2}{2g} = \xi . H,$$

$$\xi_3 \frac{c_3^2}{2g} = \rho_3 . H,$$

so wird

$$h_2 = h_a - H_u - (\xi - \rho_3) . H.$$

Der Schaufelentwurf erfolgt in der Regel unter Einhaltung einer unveränderlichen absoluten Austrittsgeschwindigkeit in der ganzen Austrittsfläche, gleichgültig ob

$$c_2 \perp u_2$$

oder

$$w_2 = u_2$$

angenommen wird.[8])

Es kann daher $\xi\, H$ in der ganzen Austrittsfläche gleich angenommen werden.

Diese Größe stellt den Gefällsgewinn infolge der Saugrohrerweiterung vor, derzufolge

$$c_3 < c_2 \text{ ist.}$$

Ist

$$\xi\, H > \rho_3\, H,$$

so wird die reine statische Druckhöhe unter dem Laufrade

$$h_2 = h_a - H_u$$

verkleinert, d. h. es tritt eine erhöhte Saugwirkung ein.

Wird

$$\xi . H = \rho_3 . H,$$

d. h. erweitert man gerade so viel, daß der Gefällsgewinn hinreicht für die Widerstandshöhe des Saugrohres, so wird

$$h_2 = h_a - H_u.$$

Es wird für diesen Fall der Neigungswinkel der Erzeugenden des kegelförmigen Saugrohres mit der Achse

$$\sphericalangle\, \varphi < 6^0$$

angegeben.[9])

Ist das Saugrohr zylindrisch, d. h.

$$c_3 = c_2;\ \ \xi . H = 0,$$

---

[8]) Speidel und Wagenbach: Über Francis-Turbinenschaufelung. „Zeitschrift d. Vereines deutscher Ingenieure“ 1899, S. 581.
Escher: Die Schaufelung der Francis-Turbine. „Schweiz. Bauzeitung“ 1903, Bd. 41, Nr. 3 und 4.

[9]) Graf: Die Turbinen. 3. Aufl. 1906, S. 28.

dann wird die Saugwirkung vermindert, und die Druckhöhe unter dem Rade ist

$$h_2 = h_a - H_u + \rho_3 . H.$$

Es tritt also förmlich ein Stau unter dem Rade ein.

Für die weitere Entwicklung soll der Fall

$$\xi H = \rho_3 . H$$

angenommen werden, der auch im Turbinenbau üblich sein dürfte.

Dann ist

$$h_2 = h_a - H_u,$$

welcher Wert zunächst für den Parallelkreis MM gültig ist. Er findet sich in der Abbildung gegeben durch den lotrechten Abstand der Parallelkreisebene MM von der Ebene OO.

Diese Druckhöhe ändert sich von Parallelkreis zu Parallelkreis, weil H_u sich ändert. Doch gibt die Abbildung jederzeit die Druckhöhe in einfachster Weise durch den Abstand des gewählten Parallelkreises von der h_a-Ebene OO.

Der nach aufwärts gerichtete Druck auf die dem Saugrohre zugekehrten Teile der Laufradunterfläche und der Austrittsrotationsfläche (Meridian *1, 2, 3, 4, 5, 6*) ist somit gegeben durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers, der sich aufbaut über der Rotationsfläche mit dem Meridiane *1, 2, 3, 4, 5, 6*, hinaufreicht bis zur ebenen Begrenzung in Ebene OO und seitlich ummantelt ist vom Kreiszylinder mit dem Durchmesser D_3. Der zylindrische Kern vom Wellendurchmesser ist herausgenommen. Die rechte Hälfte des Mittelschnittes dieses Rotationskörpers ist nach links ansteigend weit schraffiert.[10])

Es sind nunmehr noch die Verhältnisse im Raume S_2 und ihr Einfluß auf den Zapfendruck zu untersuchen (Abb. 6, Tafel I).

Wir wollen zunächst annehmen, daß die Ausflußwiderstände im Spalt σ_2 derart vereinigt seien, daß von einem Flusse von σ_2 nach σ_3 abgesehen werden kann. Der Spalt σ_3 sei gegen das Saugrohr offen; es herrscht daher in σ_3 ein

---

10) Ist das Saugrohr zylindrisch, d. h.

$$c_3 = c_2; \quad \xi = 0,$$

so folgt:

$$h_2 = h_a - H_u + \rho_3 H > h_a - H_u.$$

Der Rotationskörper reicht somit oben bis zur Ebene O_1. Der nach aufwärts wirkende Druck ist größer.

Ist das Saugrohr sehr stark erweitert, d. h.

$$c_3 < c_2; \quad \xi > \rho_3,$$

so folgt:

$$h_2 = h_a - H_u - (\xi - \rho_3) H < h_a - H_u.$$

Der Rotationskörper reicht somit oben bis zur Ebene O_2. Der nach aufwärts wirkende Druck ist kleiner.

absoluter Druck, der gemessen wird durch die absolute Druckhöhe

$$h_{\sigma_3} = h_a - H_{\sigma_3},$$

welche sich sofort aus der Abbildung ergibt; sie reicht von σ_3 bis Ebene *O O*.

Bleiben wir auch hier bei der Annahme, daß das Wasser im Raume S_2 mit der halben Winkelgeschwindigkeit des Rades rotiere, so erfolgt die Druckverteilung nach einem Paraboloide $A_2^u\, B_2^u\, C_2^u$,[11]) welches sich über der Druckhöhe h_{σ_3} aufstellt und kongruent ist mit dem Paraboloide $A_1\, B_1\, C_1$. Von $A_2^u\, B_2^u\, C_2^u$ kommt nur der kleine Ring zwischen den Zylindermänteln mit den Durchmessern D_1 und D_3 zur Geltung.

Der nach aufwärts gerichtete Druck auf die dem Raume S_2 und dem Spalte σ_3 zugekehrte Kranzfläche ist somit gegeben durch das Gewicht des ringförmigen Wasserrotationskörpers, der oben begrenzt ist durch den Paraboloidring $A_2^u\, P_3^u$, bezw. $C_2^u\, P_3^u$, unten durch die äußere Kranzfläche, welche von σ_2 bis σ_3 reicht, außen durch die Kreiszylinderfläche vom Durchmesser D_1 und innen durch den Kreiszylindermantel vom Durchmesser D_3. Der Querschnitt dieses Wasserkörpers ist in der rechten Hälfte der Abb. 6 (Taf. I) horizontal schraffiert.

Würde das Wasser im Raume S_2 an der Rotation nicht teilnehmen, so wäre der eben beschriebene Wasserkörper oben durch den in der Ebene *O O* gelegenen Kreisring von der Breite $\frac{1}{2}\,(D_1 - D_3)$ zu begrenzen. Der zwischen dem Paraboloidringe $A_2^u P_3^u$, bezw. $C_2^u\, P_3^u$ und der Ebene *O O* gelegene ringförmige Körper vom Querschnitte $A_2^u P_3^u K$, bezw. $C_2^u\, P_3^u L$ zeigt somit den Einfluß der Rotation des Wassers im Raume S_2 unter den oben gemachten Voraussetzungen. Bei einer Turbine normaler Bauart, wie sie in Abb. 6 (Taf. I) dargestellt ist, wird unter der oben gemachten Voraussetzung, σ_2 geschlossen und σ_3 offen, dieser entlastende Einfluß nur gering sein, weil die radiale Erstreckung des Kranzes klein ist. Fassen wir die beiden Teile zusammen, so ergibt sich der nach aufwärts wirkende Gesamtdruck durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers (Abb. 6, Taf. I), welcher oben begrenzt wird durch die Paraboloidringfläche $A_2^u\, P_3^u$, bezw. $C_2^u\, P_3^u$ und durch die Kreisfläche vom Durchmesser $D_3 = P_3^u\, P_3^u$, welcher hinabreicht bis zur äußeren Kranzfläche und zur Rotationsfläche mit dem Meridiane *1, 2, 3, 4, 5, 6,* und dessen seitliche Begrenzung gebildet wird durch den Kreiszylindermantel vom Durchmesser D_1.

---

[11]) Vergleiche hiezu S. 6, Ringspalt *X Y*, und Abb. 3, Parabel $A_3\, B_3\, C_3$.

Der zylindrische Kern von Wellenstärke fällt wieder heraus.

Aus der graphischen Darstellung der Abb. 6 (Taf. I) ist nun zu ersehen, daß sich dieser nach aufwärts wirkende Druck von selbst von dem nach abwärts wirkenden, unter Nummer 1 und 2 ermittelten subtrahiert, welcher sich über derselben unteren Begrenzungsfläche aufbaut und hinaufragt bis zum Paraboloid $A_1 B_1 C_1$.

Es bleibt somit an hydrostatischer Last, welche durch die Welle auf die Spur übertragen wird, das Gewicht des Wasserrotationskörpers, dessen Mittelschnitt in der Abb. 6 (Taf. I) stark ausgezogen und mit dichter Schraffierung umrändert ist; seine Begrenzungen sind gegeben durch das Paraboloid $A_1 B_1 C_1$ oben, durch den Paraboloidring $A_2^{\text{u}} P_3^{\text{u}}$, bezw. $C_2^{\text{u}} P_3^{\text{u}}$ und die in der Ebene $O\,O$ gelegene Kreisfläche vom Durchmesser $P_3^{\text{u}} P_3^{\text{u}} = D_3$ unten, seine seitliche Umhüllung wird gebildet durch den Kreiszylindermantel vom Durchmesser D_1; ein zylindrischer Kern von Wellenstärke ist herauszunehmen.

Bei der vorausgesetzten Anordnung (Turbine normaler Bauart, σ_3 gegen das Saugrohr offen, Widerstände in σ_2) ist, wie kurz zuvor erörtert wurde, der entlastende Einfluß der Rotation im Spaltraume S_2 so gering, daß er vernachlässigt werden kann; der eben beschriebene, den resultierenden hydrostatischen Druck vorstellende Wasserkörper wäre dann unten durch die in der Ebene $O\,O$ gelegene Kreisfläche vom Durchmesser D_1 zu begrenzen;[12]) sein Mittelschnitt ist

$$A_1 B_1 C_1 L K A_1.$$

Der Kern von Wellenstärke fällt wieder heraus.

Verwandelt man das Paraboloid $A_1 B_1 C_1$ in den inhaltsgleichen Zylinder $M_1 N_1 B B M_1$, dessen Höhe

$$\overline{M_1 N_1} = \frac{1}{2} . \overline{Z B_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1{}^2}{2g} = \frac{1}{8} \cdot \frac{u_1{}^2}{2g} \text{ ist,}$$

in unserem Falle wäre

$$\overline{M_1 N_1} = \frac{1}{2} . 0{\cdot}74 = 0{\cdot}37 \; m,$$

so wird

Zylinder $M_1 N_1 L K M_1$ = Rotationskörper $A_1 B_1 C_1 L K M_1$ und damit die hydrostatische Last:

$$P_1{}^{(1)} = \frac{\pi}{4} D_1{}^2 \left(h_p - \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1{}^2}{2g}\right) . \gamma - f . \left(h_p - \frac{U_1{}^2}{2g}\right) . \gamma.$$

---

12) Im Falle eines zylindrischen Saugrohres käme diese untere Begrenzung in die Ebene O_1 zu liegen; die Wirkung auf den Zapfendruck ist daher entlastend.

Ist das Saugrohr sehr stark erweitert, dann käme die untere Begrenzung in die Ebene O_2 zu liegen. Starke Saugrohrerweiterung wirkt somit stärker belastend auf den Spurzapfen.

Mit $U_1 = \frac{u_1}{2}$ wird:

$$P_1^{(1)} = + \frac{\pi}{4} D_1^2 \cdot \left(h_p - \frac{1}{8} \cdot \frac{u_1^2}{2g}\right) \cdot \gamma -$$
$$- f\left(h_p - \frac{1}{4} \cdot \frac{u_1^2}{2g}\right) \cdot \gamma \; kg.$$

In diesen Gleichungen bedeutet f den Querschnitt der Welle in m^2.

Ferner sind einzusetzen:

D_1 in m,
u_1 in m/Sek.,
$\gamma = 1000 \; kg/m^3$,
$h_p = H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g}$ in m Wassersäule,

um $P_1^{(1)}$ in kg zu erhalten.

Der zweite Teil ist gegenüber dem ersten verschwindend klein, so daß wir ihn vernachlässigen können, was übrigens auch dem Sinne unserer Rechnung entspricht.

Es wäre dann

$$P_1^{(1)} = \frac{\pi}{4} D_1^2 \left(h_p - \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1^2}{2g}\right) \cdot \gamma.$$

Für unsere Turbine ist:

$$P_1^{(1)} = \frac{\pi}{4} \cdot 2{\cdot}4^2 (3 - 0{\cdot}37) \cdot 1000 - \frac{\pi}{4} \cdot 0{\cdot}22^2 \cdot (3 - 0{\cdot}74) \times$$
$$\times 1000 = 11.898 - 86,$$
$$P_1^{(1)} = + 11.812 \; kg.$$

Als Ergebnis der bisherigen Zusammensetzung ist festzuhalten, daß bei Saugrohraufstellung das Gewicht des Wassers im Rade aus der Rechnung fällt; das Gleiche gilt, wenn die Turbine im Unterwasser arbeitet. Läuft sie in freier Luft, dann bleibt das Gewicht des Wassers im Rade belastend in der Rechnung, was auch ohneweiters einzusehen ist, da bei der Anordnung im Saugrohr oder im *U. W.* der Wasserkörper im Wasser schwimmt, sein Auftrieb somit seinem Gewichte gleich ist.[13]).

---

[13]) Die wenigen Angaben über die Berechnung des Zapfendruckes in der Literatur beziehen sich meist auf achsiale Überdruckturbinen im Saugrohre und enthalten als belastenden Bestandteil das Gewicht des Wassers im Rade.

Bach, „Die Wasserräder" 1886, S. 59;

Freytag, „Hilfsbuch f. d. Maschinenbau" 1906, S. 851;

Henne, „Die Wasserräder und Turbinen" 1903, S. 166;

Ehemann, „Hydraulische Motoren" 1901, S. 51, setzt das Gewicht des pro Sekunde durch das Laufrad fließenden Wassers.

Graf, „Die Turbinen" 1904, 2. Aufl., S. 154, läßt zwar das Gewicht des Wassers weg, aber gerade dort, wo es in der Rechnung bleibt. Die 3. Aufl. 1906, S. 25, 26, 27, enthält unklare Angaben über die Berechnung des Spurdruckes bei Francisturbinen.

Auch das Gewicht des ganzen Laufrades, aus Wasser gedacht, ist hinausgefallen, und es hat sich somit auf die einfachste Weise sein Auftrieb erledigt.

Zu bemerken ist noch, daß bei Spaltdruckregulierung die Größe $P_1^{(1)}$ mit h_p vom Beaufschlagungsgrade abhängig ist.

b. Der hydrodynamische Teil des Zapfendruckes.

4. Die achsiale Reaktion.

Es handelt sich um die Größe:

$$R_z = \frac{Q \cdot \gamma}{g} \cdot [w_1 \cos(z\, w_1) - w_2 \cdot \cos(z\, w_2)].$$

$(z\, w_1)$ und $(z\, w_2)$ sind die Winkel, welche die relativen Geschwindigkeitsrichtungen mit der parallel zur Achse nach abwärts gewählten $+ Z$-Richtung einschließen (Abb. 7 und 8, S. 21).

Statt der relativen Geschwindigkeiten können bei der achsialen Reaktion ohne jede Weiterung die Z-Komponenten der absoluten Geschwindigkeiten gesetzt werden; diese Komponenten sind jenen der relativen Geschwindigkeiten gleich. Es ist also auch

$$R_z = \frac{Q \cdot \gamma}{g} [c_1 \cdot \cos(z\, c_1) - c_2 \cdot \cos(z\, c_2)].$$

Bei den Francis-Turbinen ist wegen der horizontalen Stromrichtung im Eintrittsquerschnitte des Laufrades

$$\sphericalangle (z\, c_1) \text{ und } \sphericalangle (z\, w_1) = 90^0,$$

somit

$$R_z = - \frac{Q \cdot \gamma}{g} \cdot c_2 \cdot \cos(z\, c_2).$$

Die achsiale Reaktion wirkt somit bei den Francis-Turbinen entlastend, und es wird daher im Sinne unserer Rechnung gelegen sein, den absoluten Wert für R_z nicht zu groß zu erhalten.

Würde man die Austrittsfläche des Laufrades als jenen Ort annehmen, in welchem die Z-Komponenten der absoluten Austrittsgeschwindigkeit, das sind die Werte

$$c_2 \cdot \cos(z\, c_2),$$

zu ermitteln sind, so wäre zwar c_2 in der ganzen Ausdehnung der Austrittsrotationsfläche unveränderlich, aber die Winkel $(z\, c_2)$ ändern ihre Größe von Parallelkreis zu Parallelkreis (Abb. 7 und 8, S. 21).

Man müßte also in der Gleichung für R_z für $c_2 \cos(z\, c_2)$ entweder jenen Wert als mittleren einsetzen, welcher dem

Parallelkreise der mittleren Stromfläche zukommt, oder man müßte in Teilturbinen zerlegen, für jede die Größe

$$c_2 \cos (z\, c_2),$$

die der Teilturbine zukommende Wassermenge q und damit die Teilreaktion r_z ermitteln. Die Reaktion wäre dann

$$R_z = \Sigma\,.\,r_z.$$

Dieser umständliche Vorgang muß jedoch nicht eingehalten werden, denn das Wasser bleibt bei den Francis-Turbinen nach dem Verlassen des Laufrades nicht ohne Führung, bloß von einer Wirbelfläche begrenzt wie etwa bei den Jonval-Turbinen gewöhnlicher Bauart, sondern es wird durch den Laufradboden und den äußeren Kranz in die Richtung des Saugrohres übergeführt, und zwar ohne wesentliche Änderung der Größe der Geschwindigkeit. Man wird daher als Austrittsquerschnitt die in der horizontalen Ebene $S_0\, S_0$ (Abb. 6, Taf. I, unter dem Laufrade) gelegene Kreisringfläche mit dem äußeren Durchmesser D_3 ansehen können.

Je nach Anordnung des untersten Halslagers kann hier auch schon eine volle Kreisfläche mit dem Durchmesser D_3 bestehen.

Würde so geschaufelt, daß

$$w_2 = u_2,$$

also c_2 zwar unveränderlich, aber nicht $\perp u_2$ ist, so ist die Strömung im Saugrohre eine solche mit kreisender Bewegung[14]), und es wäre zur Berechnung von R_z die Komponente parallel zur Achse zu suchen.

Würde als Bedingung für den Schaufelentwurf

$$c_2 \text{ unveränderlich und } \perp u_2$$

angenommen, so ist die Bewegung des Wassers im Saugrohre eine einfache Strömung[14]), und es ist in der Gleichung für R_z

$$\text{statt } c_2 \cos (z\, c_2) \text{ einfach } c_2$$

zu setzen. Die letztere Konstruktionsannahme gibt auch in dieser Beziehung eine einfachere Rechnung.

Aber auch für

$$w_2 = u_2$$

wird man wegen der Kleinheit des Winkels zwischen c_2 und seiner zur Achse parallelen Komponente in der Ebene $S_0\, S_0$ statt der letzteren c_2 setzen können. Durch entsprechende

[14]) Prášil: „Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen". I. und III. „Schweiz. Bauzeitung" 1903, Bd. 41.

Verkleinerung der folgenden Koeffizienten K wird man dem Umstande

$$w_2 = u_2$$

Rechnung tragen können.

Berücksichtigt man noch, daß infolge der Schaufelstärken eine Verkleinerung der Geschwindigkeit beim Austritt aus dem Rade erfolgt, und nimmt man an, daß die freie Austrittsfläche etwa 0·9 der gesamten beträgt, so ist statt c_2 zu setzen $0 \cdot 9\, c_2$, und es wird dann

$$\boldsymbol{R_z} = -0 \cdot 9 \frac{Q \cdot \gamma}{g} \cdot c_2.$$

Setzt man nun, wie üblich,

$$\frac{c_2^2}{2g} = \varkappa \,.\, H,$$

so wird

$$c_2 = \sqrt{2g\varkappa} \,.\, \sqrt{H} = \varkappa_1 \,.\, \sqrt{H}, \quad \text{wo } \varkappa_1 = \sqrt{2g\varkappa}$$

und

$$R_z = -\left(0 \cdot 9 \frac{\gamma}{g} \varkappa_1\right) . \; Q \,.\, \sqrt{H}.$$

Setzt man mit

$$0 \cdot 9 \frac{\gamma}{g} = 0 \cdot 9 \frac{1000}{9 \cdot 81} = 91 \cdot 74$$

$$91 \cdot 74\, \varkappa_1 = K,$$

so wird

$$\boldsymbol{R_z = -K \,.\, Q \,.\, \sqrt{H} \;\; kg},$$

in welcher Gleichung

Q die Sekundenwassermenge in m^3,
H das Motorgefälle in m

einzusetzen sind.

Es erscheint somit K als Größe der Reaktion für 1 m^3/Sek. und 1 m Gefälle.

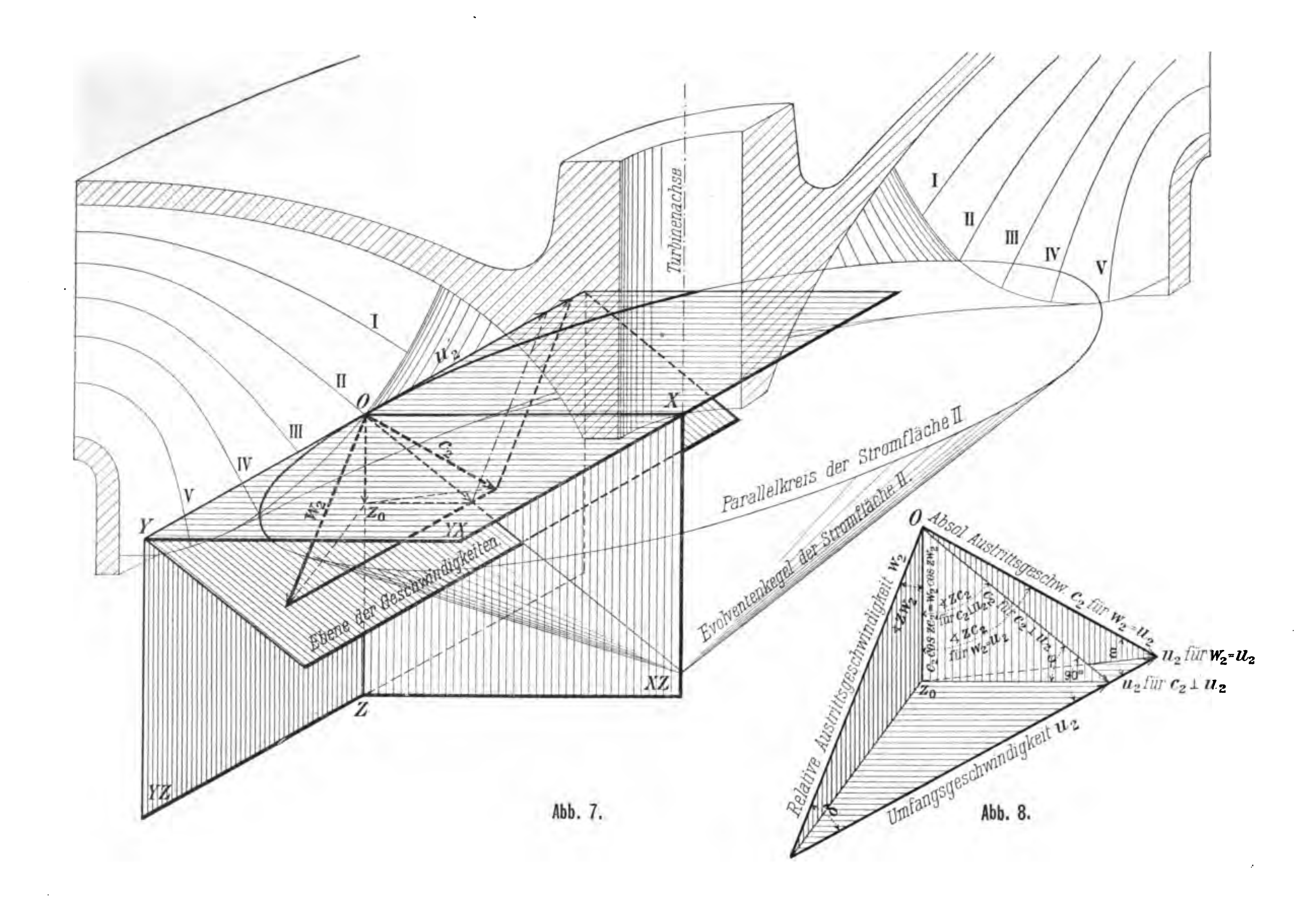
Wollte man den Wortschatz der angewandten Hydromechanik um ein neues Wort bereichern, so könnte man K die relative Reaktion heißen, ähnlich wie $Q_1 = \frac{Q}{\sqrt{H}}$ relative Wassermenge genannt wird.[15])

Bezeichnet man mit K' den zu dem bestimmt angenommenen $\varkappa'$ gehörigen Wert, so ist wegen

$$K = 91 \cdot 74 \sqrt{2g} \,.\, \sqrt{\varkappa},$$

---

[15]) Wagenbach-Reichel, Neuere Turbinenanlagen. Berlin, Springer 1905, S. 14.



Turbinenachse
I
II
III
IV
V
O
X
Y
Z
XZ
YZ
YX
u_2
c_2
w_2
z_0
Parallelkreis der Stromfläche II
Evolventenkegel der Stromfläche II.
Ebene der Geschwindigkeiten
Absol. Austrittsgeschw. c_2 für $w_2 = u_2$
Relative Austrittsgeschwindigkeit w_2
Umfangsgeschwindigkeit u_2
u_2 für $w_2 = u_2$
u_2 für $c_2 \perp u_2$
c_2 für $c_2 \perp u_2$
90°

Abb. 7.

Abb. 8.

$$K' = 91{\cdot}74 \sqrt{2g} \,.\, \sqrt{\varkappa'}$$

$$K = \left(\frac{K'}{\sqrt{\varkappa'}}\right) . \sqrt{\varkappa}$$

oder

$$K^2 = \left(\frac{K'^2}{\varkappa'}\right) . \varkappa,$$

d. h. K und $\varkappa$ sind die Ordinaten einer Parabel mit dem Parameter

$$2\,b = \frac{K'^2}{\varkappa'}.$$

Nimmt man z. B.

$$\varkappa' = 0{\cdot}10,$$

so folgt

$$K' = 91{\cdot}74 \sqrt{2g} \,.\, \sqrt{0{\cdot}10} = 128{\cdot}4$$

und

$$\frac{K'^2}{\varkappa'} = 164865{\cdot}6,$$

damit die Gleichung der Parabel

$$K^2 = 164865{\cdot}6\,\varkappa.$$

Die Reaktion wächst mit dem Austrittsverluste.

Wird ein gewisser Austrittsverlust $\varkappa$ zugelassen, so kann man aus der Parabelgleichung das zugehörige K rechnen und damit

$$R_z = - K \,.\, Q \,.\, \sqrt{H}$$

ermitteln.

Die Rechnung kann man sich durch die Konstruktion der Parabel ersparen, indem man $\varkappa$ als Abzissen, K als Ordinaten aufgetragen denkt (Abb. 9, S. 23). Zur Konstruktion genügt der früher ermittelte Punkt mit

$$\left.\begin{aligned} \varkappa' &= 0{\cdot}10, \\ K' &= 128{\cdot}8. \end{aligned}\right\}$$

Zu bemerken ist, daß sich R_z mit dem Beaufschlagungsgrade ändert.

Bei Zentrifugalpumpen ist sinngemäß zu verfahren.

Für unsere Turbine wäre mit

$$\frac{c_2^2}{2g} = 0{\cdot}04\,H,$$

also

$$\varkappa = 0{\cdot}04,$$

nach dem Diagramme

$$K = 81{\cdot}3,$$

daher

$$R_z = -81{\cdot}3\, Q \,.\, \sqrt{H} =$$

$$= -81{\cdot}3 \,.\, 9{\cdot}7 \,.\, 2{\cdot}65,$$

$$\boldsymbol{R_z = -2090\ kg.}$$

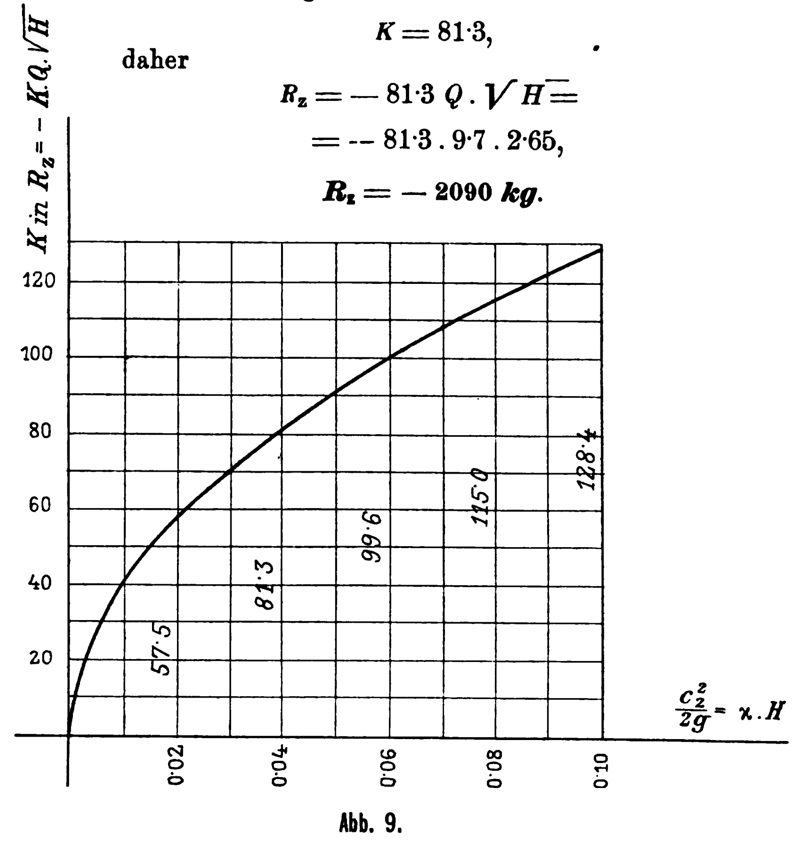


Abb. 9.

Will man, nur der Übersicht wegen, R_z ebenfalls als Wasserzylinder über der Bodenfläche

$$(D_1^2 - d^2) \,.\, \frac{\pi}{4}$$

darstellen, so wäre dessen Höhe h_R aus

$$R_z = (D_1^2 - d^2) \,.\, \frac{\pi}{4} \,.\, h_R \,.\, \gamma,$$

$$2090 = (2{\cdot}4^2 - 0{\cdot}22^2) \,.\, \frac{\pi}{4} \,.\, h_R \,.\, 1000,$$

$$\boldsymbol{h_R = 0{\cdot}46\ m,}$$

welcher Wert über Ebene $O\ O$ in

$$K\, R_1 = L\, R_2$$

aufgetragen wurde (Abb. 6, Tafel I).

Das Gewicht des Wasserzylinders

$$R_1 R_2 L K R_1$$

mit dem fehlenden Kerne von Wellenstärke gibt die achsiale Reaktion R_z, welche hier entlastend wirkt. Da die Reaktion bis zur Ebene $S_0 S_0$ (Abb. 6, Taf. I), richtiger bis zur Ringfläche 1, 3, 4, 6 berücksichtigt wurde, so wäre auf S. 12 unter Nr. 3 statt der Fläche 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Ringfläche 1, 3, 4, 6 zu nehmen. Da aber auch hier die statischen Druckhöhen gelten, welche bis $O\,O$ reichen, so ändert sich an der Zusammensetzung des Druckes nichts. Bei einer schärferen Rechnung muß das Ergebnis ein anderes sein und es wurde diese Frage auch auf Seite 143 behandelt.

5. Der achsiale hydraulische Gesamtdruck und der achsiale Schaufeldruck.

Mit der Ermittlung der achsialen Reaktion ist der hydrodynamische Teil des Zapfendruckes erledigt.

Es ist von Interesse, auf die Zusammensetzung der Reaktion näher einzugehen.

Diese ist nichts anderes als die Summe aller Drücke, welche infolge der Wasserbewegung auf das Laufrad ausgeübt werden. Die Bewegung des Wassers im Laufrade unter Energieabgabe ist eine gezwungene Relativbewegung; die Zwangsbahnen sind die relativen Wasserwege, welche auf der Schaufelfläche verlaufen. Die Schaufel wirkt mit einer gewissen Zwangskraft auf das Wasser, übt also auf dasselbe einen Druck aus, den dieses mit einem gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten erwidert. Von dem letzteren geht uns bei der Berechnung des Zapfendruckes nur die achsiale Komponente an, welche als achsialer Schaufeldruck mit Z_q bezeichnet werden soll.

Boden und Kranz des Laufrades erfahren infolge der hydraulischen Pressung des an ihnen dahinströmenden Wassers Drücke, für deren achsiale Differenz die Benennung achsialer hydraulischer Gesamtdruck und das Zeichen P_Δ eingeführt wird.

Es besteht dann die Gleichung:

$$R_z = P_\Delta + Z_q.$$

Der **achsiale hydraulische Gesamtdruck** P_Δ kann auf folgende Art ermittelt werden:

Längs des Laufradbodens $\sigma_1\,2$ (Abb. 6, Tafel I) nimmt die absolute Druckhöhe ab

von $h_1'' = \overline{A_1\,\sigma_1}$ auf $h_2'' = \overline{O''2}$ nach der Kurve $A_1\,O''$.

Längs der Kranzfläche σ_2 1 (Abb. 6) fällt der Druck ab von $h_1' = A_1 \sigma_2$ auf $h_2' = \overline{P_8{}^u 1}$ nach der Kurve $A_1 P_8{}^u$.

Was die beiden Druckverteilungskurven $A_1 O''$ und $A_1 P_8{}^u$ betrifft, so erfordert ihre Aufzeichnung die Berechnung der absoluten Druckhöhe h für mehrere Parallelkreise zwischen σ_1 und 2, bezw. zwischen σ_2 und 1 aus der Energiegleichung, aus welcher folgt:

$$h = h_1 + (H_{u1} - H_u) + \frac{w_1{}^2 - w^2}{2g} + \frac{u^2 - u_1{}^2}{2g} - \rho H.$$

In dieser Gleichung bedeuten:

h, w, u, H_u, ρ, die absolute Druckhöhe, die relative Geschwindigkeit, die Umfangsgeschwindigkeit, die Höhe über $U. W.$, die Widerstandszahl für den gewählten Parallelkreis.

Die gleichbezeichneten Größen, mit dem Zeiger 1 versehen, beziehen sich auf den Parallelkreis σ_1, bez. σ_2.

H_u und u folgen unmittelbar aus der Wahl des Parallelkreises, aus dessen Lage auch ρ geschätzt werden kann (in σ_1, bezw. σ_2 ist $\rho = 0$; in 2, bezw. 1 $\rho = \rho_2 = = 0{\cdot}04$).

Da die Größen für σ_1 und σ_2 bekannt sind, so erübrigt noch die Berechnung der relativen Geschwindigkeit w in dem gewählten Parallelkreise. Zu diesem Zwecke verwendet man die Teilturbinen längs σ_1 2 und σ_2 1, für welche die durchfließende Wassermenge bekannt ist. Aus dem Schaufelplane kann man den lichten Durchflußquerschnitt der Teilturbine $\perp w$ am Orte des gewählten Parallelkreises entnehmen, und der Quotient aus Durchflußmenge und Querschnitt gibt w.

Man könnte auch mit den absoluten Geschwindigkeiten rechnen. Die Gleichung für die absolute Druckhöhe in einem beliebigen Parallelkreise zwischen σ_1 und 2 oder zwischen σ_2 und 1 würde lauten:

$$h = (h_a - H_u) + (1 - \rho_1 - \rho) H - \eta H + \frac{\omega}{g} . (c_u R) - \frac{c^2}{2g} . \text{[16]}$$

[16]) Für einen Parallelkreis zwischen σ_1 und 2 ergibt sich diese Gleichung, wie folgt. (Auf σ_2 1 ist ganz ähnlich zu verfahren):

Parallelkreis σ_1: $$h_1 + \frac{c_1{}^2}{2g} = h_a + H_{01} - \rho_1 H \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

Parallelkreis zwischen σ_1 und 2: $$\left. \begin{array}{l} h + \frac{c^2}{2g} = h_1 + \frac{c_1{}^2}{2g} + \\ + (H_0 - H_{01}) - L - \rho H \end{array} \right\} . \; . \; b);$$

L ist die zwischen den beiden Parallelkreisen von 1 kg Wasser abgegebene Arbeit, welche sich folgenderweise berechnet:

Sie würde die Berechnung der absoluten Geschwindigkeit c und deren Umfangskomponente c_u im gewählten Parallelkreise vom Halbmesser R erfordern, was wie zuvor mit Hilfe des Schaufelplanes und der Teilturbinen erfolgen kann.

Die Kranzfläche σ_2 1 (Abb. 6 *a*, S. 27) erfährt einen Druck nach abwärts, der gegeben ist durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers mit dem Schnitte

$$\sigma_2\, 1\, P_3{}^u\, A_1\, \sigma_2;$$

der Ring $\sigma_1 P$ des Laufradbodens erfährt einen Druck nach aufwärts, der gegeben ist durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers mit dem Schnitte

$$\sigma_1\, P\, Q\, A_1\, \sigma_1.$$

Der Unterschied dieser beiden Körper gibt unten positiv den Druckkörper A mit dem Schnitte $\sigma_2\, 1\, P\, \sigma_1\, \sigma_2$, oben negativ den Druckkörper C mit dem Schnitte $A_1\, P_3{}^u\, Q\, A_1$.

Bei der Bildung des hydrostatischen Teiles des Zapfendruckes wurde angenommen, daß das Laufrad infolge der Druckverhältnisse im Saugraum einen Druck nach aufwärts erfahre, welcher gegeben ist durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers mit dem Schnitte

$$1 . 2 . O''\, P_3{}^u\, 1;$$

tatsächlich erfährt der Ring $P\, 2$ des Laufradbodens (Abb. 6 *a*) einen Druck nach aufwärts, welcher gegeben ist durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers mit dem Schnitte

$$P\, 2\, O''\, Q\, P;$$

Die Grundgleichung für die Turbinenberechnung lautet (Flächensatz):

$$(u\, c_u)_1 - (u\, c_u)_2 = g\, \eta\, H,$$

$$u_1 = R_1\, \omega,$$

$$u_2 = R_2\, \omega;$$

$$\frac{\omega}{g} \cdot [(c_u\, R)_1 - (c_u\, R)_2] = \eta\, H,$$

ist die hydraulische Leistung für 1 *kg* Wasser (arbeitendes Gefälle). Wird so geschaufelt, daß

$$c_2 \perp u_2,$$

also $c_u = 0$ ist,

so folgt:

$$\frac{\omega}{g} \cdot (c_u\, R)_1 = \eta\, H.$$

Es ist dann:

$$L_1 = \frac{\omega}{g} \cdot [(c_u\, R)_1 - (c_u\, R)] = \eta\, H - \frac{\omega}{g} \cdot (c_u\, R),$$

und mit den beiden Gleichungen *a*) und *b*) ergibt sich die oben im Texte aufgeschriebene Gleichung für *h*.

es ist daher noch der Unterschied der beiden letztgenannten Druckkörper zu bilden, welcher wieder zwei Teile ergibt:

Unten positiv den Druckkörper B mit dem Schnitte $1 . 2 P 1$, oben negativ den Druckkörper D mit dem Schnitte $P_3{}^u O'' Q P_3{}^u$.

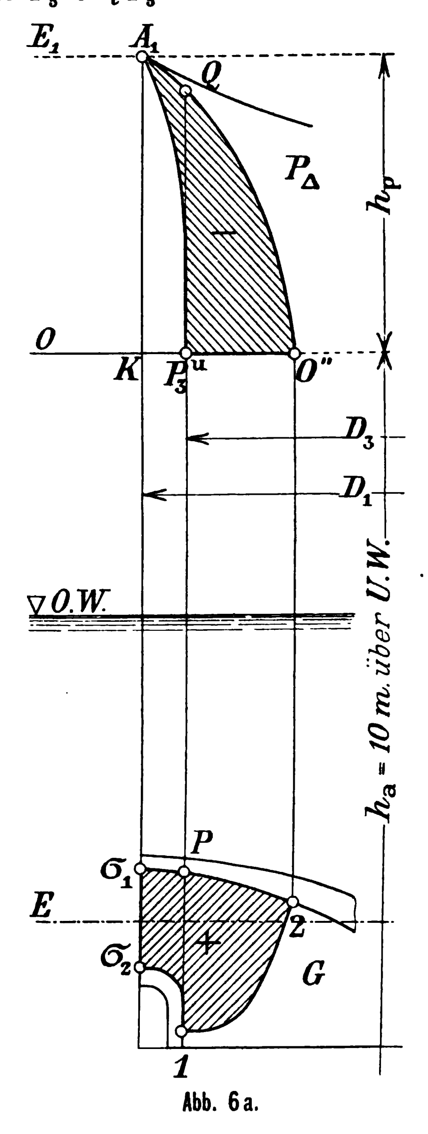


Abb. 6a.

Der gesamte Druckunterschied in den inneren Laufradbegrenzungen ist somit gleich:

$$- \text{Gewicht} \underbrace{(C + D)}_{A_1 P_3{}^u O'' A_1} + \text{Gewicht} \underbrace{(A + B)}_{\sigma_2 1 . 2 \sigma_1 \sigma_2}.$$

Der zweite Teil ist das Gewicht G des Wassers im Rade, welches bereits bei der Zusammensetzung des hydrostatischen Teiles des Zapfendruckes berücksichtigt wurde (S. 12 u. 17).

Der erste Teil der obigen Summe ist der achsiale hydraulische Gesamtdruck P_Δ.

Bezeichnet man die Fläche $A_1 P_3^u O'' A_1$ mit F_Δ, so rechnet sich P_Δ aus der Gleichung:

$$P_\Delta = -\gamma \cdot F_\Delta \cdot 2\, r_\Delta\, \pi \; kg$$

mit $\gamma = 1000\ kg/m^3$,

F_Δ in m^2,

r_Δ, dem Halbmesser des Schwerpunktskreises der Flächen F_Δ, in m.

Der letztere kann auf bekannte Art am einfachsten zeichnerisch ermittelt werden.[17]

Der achsiale hydraulische Gesamtdruck P_Δ ist negativ.

In Abb. 6 (Taf. I) wurde die Fläche F_Δ links ansteigend dicht schraffiert.

Der aus der obigen Gleichung gerechnete Wert P_Δ gilt für unendlich dünne Schaufeln.

Infolge der endlichen Schaufelstärken tritt ein Flächenverlust am Laufradboden (Meridian σ_1 2) und in der unteren maßgebenden Rotationsfläche mit dem Meridiane σ_2 1 . 2 ein. Außerdem entstehen an den Schaufeln selbst belastende Druckdifferenzen.

Mit Hilfe der Abb. 6*b*, 6*c* und 6*d* (Tafel I) soll der Einfluß der endlichen Schaufelstärken auf den achsialen hydraulischen Gesamtdruck verfolgt werden. Der Abb. 6*b* (Taf. I) ist die Abb. 6*a* (S. 27) unterlegt, so daß die Bedeutung der Kurven $A_1 O''$ und $A_1 P_3^u$ als bekannt vorausgesetzt werden kann.

α) Wir gehen aus von dem Falle der unendlich dünnen Schaufel (Abb. 6*b*, Taf. I).

Schneiden wir das Laufrad und den Druckrotationskörper $A_1 O'' P_3^u A_1$ durch einen Kreiszylinder mit dem beliebig angenommenen Durchmesser $2R$, so erhalten wir die Druckverteilung zu beiden Seiten des Schaufelschnittes in der Mantelfläche dieses Kreiszylinders; diese denken wir uns aufgerollt und um $\overline{ak}$ in die Zeichenfläche umgelegt.

Die unendlich dünne Schaufel gibt mit dem Zylinder den Schnitt kl (im Aufriß ist der Deutlichkeit wegen dl

---

[17]) „Hütte", 19. Auflage, I. Bd., S. 165.
Die Ermittlung ist in Abb. 52 (Taf. VI) durchgeführt.

größer als die gleiche Strecke kl des Grundrisses gezeichnet); der Laufradboden, die Austrittsfläche und der Druckkörper werden in den kongruenten Parallelkreisen k, a und d geschnitten. Am Laufradboden herrscht im Schnittkreise der durch die Druckhöhe $\overline{ak}$ gegebene, in der Austrittsfläche herrscht im Schnittkreise der durch die Druckhöhe $\overline{ol}$ gegebene absolute Druck. In den kongruenten Parallelkreisen zwischen Laufradboden und Austrittsfläche ist zur Ermittlung der Druckhöhen so vorzugehen, wie bei den Druckverteilungskurven $A_1\,O''$ und $A_1\,P_3{}^u$ (S. 25), oder durch eingelegte von A_1 nach dem zugehörigen Punkte in $O''\,P_3{}^u$ gehende Druckverteilungskurven.

Durch ao sei die Druckverteilung längs kl gegeben.

Diese gilt für beide Seiten des Schaufelschnittes, da die Schaufeln unendlich dünn sind.

Auf die obere (linke) Seite des Schaufelschnittes wirkt nach abwärts:

$$aolka,$$

auf die untere (rechte) Seite des Schaufelschnittes wirkt nach aufwärts der gleichgroße Druck:

$$aolka.$$

Beide zusammen geben die Differenz Null. Da bei unendlich dünnen Schaufeln auch kein Flächenverlust im Laufradboden und in der unteren Grenzfläche $\sigma_2\,1.2$ entsteht, so gilt für P_Δ die auf S. 28 aufgestellte Gleichung.

β) Gehen wir nun über auf den F a l l d e r e n d l i c h e n S c h a u f e l s t ä r k e (Abb. 6 b, Taf. I).

Zunächst setzen wir voraus, d e r S c h n i t t kk_1l_1lk d e r S c h a u f e l m i t d e m Z y l i n d e r m a n t e l h a b e ü b e r a l l d i e g l e i c h e B r e i t e $\overline{kk_1} = \overline{ll_1}$.

Auf die obere (linke) Seite des Schaufelschnittes $k_1\,l_1$ wirkt belastend (nach abwärts):

$$a_1\,o_1\,l_1\,k_1\,a_1,$$

auf die untere (rechte) Seite des Schaufelschnittes kl wirkt entlastend (nach aufwärts):

$$aolka.$$

Nun ist nach der Voraussetzung $k_1\,l_1$ durch Horizontalverschiebung (Drehung am Zylindermantel) aus kl entstanden. Da nun im selben Parallelkreise der Druck unveränderlich ist, so ist auch $a_1\,o_1$ kongruent mit ao, woraus folgt, daß die beiden oben angegebenen Wasserkörper, überall von der radialen Breite $d\,R$, kongruent sind. U n t e r d e r V o r a u s s e t z u n g g l e i c h e r h o r i z o n t a l e r B r e i t e d e s S c h a u f e l s c h n i t t e s $(\overline{kk_1} = \overline{ll_1})$ e r g e b e n s i c h s o m i t a n d e n S c h a u f e l n k e i n e D r u c k d i f f e r e n z e n.

Es ist hiebei ganz gleichgiltig, ob die Kurven ao und $a_1 o_1$ nach oben konvex oder konkav verlaufen. Auch ist es nicht erforderlich, daß in allen Zylinderschnitten die bezüglichen Breiten kk_1 untereinander gleich sind.

Wohl aber entsteht durch die endliche Schaufelstärke ein Flächenverlust, in $\sigma_1 2$ und $\sigma_2 1.2$ von gleicher Größe, und zwar ist maßgebend hiefür die Grundrißprojektion der Schaufelschnittfläche SS mit dem Laufradboden, welche mit dem durch 2 geführten Horizontalschnitte mit der Schaufel flächengleich ist. Diese Flächen sind aber inhaltsgleich mit den im Grundrisse mit rr bezeichneten Figuren; und zwar entsteht ein Rechteck bei gleichen kk_1 in allen Zylinderschnitten, ein Trapez (strichliert angedeutet), wenn die Schaufelstärke senkrecht zum Profil SkS überall gleich ist.

Jede Schaufel verkleinert somit den Absolutwert des für unendlich dünne Schaufeln giltigen P_Δ um

$$\gamma . s_1 . F_\Delta \; kg,$$

wenn mit s_1, in m gemessen, die Breite des Rechteckes rr oder die verglichene Breite des Trapezes bezeichnet wird.

Hat das Laufrad z_1 Schaufeln, so ist die gesamte Verkleinerung infolge des Flächenverlustes für den behandelten Fall:

$$\gamma . z_1 . s_1 . F_\Delta \; kg$$

und es wäre daher P_Δ zu rechnen aus:

$$P_\Delta^{(1)} = -\gamma . F_\Delta . (2\, r_\Delta \pi - z_1 . s_1) =$$

$$= -\gamma . F_\Delta . 2\, r_\Delta \pi . \left(1 - \frac{z_1 . s_1}{2\, r_\Delta \pi}\right) kg.$$

Setzt man

$$\frac{z_1 . s_1}{2\, r_\Delta \pi} = m \text{ und } 1 - m = k_1,$$

so folgt

$$\boldsymbol{P_\Delta^{(1)} = - k_1 . \gamma . F_\Delta . 2\, r_\Delta \pi \; kg = k_1 . P_\Delta},$$

mit

$$\boldsymbol{k_1 = 1 - \frac{z_1 . s_1}{2\, r_\Delta \pi}}.$$

Im Mittel wird gesetzt werden können

$$m = 0{\cdot}15,$$

woraus folgt $\qquad k_1 = 0{\cdot}85.$

Der Wert kann bei jeder Ausführung gerechnet werden.

γ) Gehen wir zu dem allgemeinen Falle über, der durch den Schaufelschnitt $k\, k_1\, l_2\, l\, k$ gekennzeichnet ist,

so erhalten wir auf $k\,l$ die frühere Druckverteilungskurve; auf $k_1\,l_2$ erfolgt die Druckverteilung nach $a_1\,c\,o_2$ (Abb. 6*b*, Taf. I).

Auf die obere (linke) Seite des Schaufelschnittes $k_1\,l_2$ wirkt belastend (nach abwärts):

$$a_1\,o_2\,l_2\,k_1\,a_1,$$

auf die untere (rechte) Seite des Schaufelschnittes $k\,l$ wirkt entlastend (nach aufwärts):

$$a\,o\,l\,k\,a.$$

Verschiebt man die zuletzt genannte Fläche horizontal um $k\,k_1$ nach links, so kommt sie in die Lage

$$a_1\,o_1\,l_1\,k_1\,a_1$$

und es bleibt als Differenz:

$a_1\,o_2\,o_1\,a_1$ positiv,
$o_2\,o_1\,l_1\,l_2\,o_2$ positiv,
$k_1\,l_1\,l_2\,k_1$ negativ.

Der zuletzt genannte Teil wird durch einen gleich großen positiven von der aus Wasser gedachten Schaufel aufgehoben (S. 12, Nummer 2); der vorletzte Teil wird durch einen gleich großen negativen von dem unter Nummer 3 (S. 12) behandelten Teile des Druckes auf die Austrittsrotationsfläche ausgeglichen; es bleibt daher nur der erste Teil als Druckdifferenz an der Schaufel im Zylinderschnitte 2 *R*.

Da es bei der Ausmittlung des Druckdifferenzkörpers nur auf die Größe der Fläche ankommt, so kann eine Formverwandlung vorgenommen werden, derart, daß

$$a_0\,c_0\,o_2\,o_1\,a_0 = a_1\,c\,o_2\,o_1\,a_1.$$

Wiederholt man das Verfahren für mehrere Zylinderschnitte zwischen 2 und σ_1 (Abb. 6 b, Aufriß), so liefert jeder ein dem Dreiecke $a_1\,o_2\,o_1\,a_1$, bezw. $a_0\,o_2\,o_1\,a_0$ entsprechendes und der von einer Schaufel herrührende belastende Druckdifferenzkörper erhält schließlich die in Abb. 6*c* (Taf. I) dargestellte Form; er baut sich über F_Δ auf. Bezeichnet man seinen Rauminhalt in m^3 mit v, so tritt bei z_1 Schaufeln im Laufrade infolge der Druckdifferenz an denselben eine Verkleinerung des Absolutwertes von P_Δ für unendlich dünne Schaufeln ein, welche gegeben ist durch

$$\gamma \cdot z_1 \cdot v\ kg.$$

Diese Keile, welche in den Körper des P_Δ eindringen, werden verständlich, wenn man den Flächenverlust in Betracht zieht.

Am Laufradboden behält er den unter β) ermittelten Wert. In $\sigma_2\,1\,.\,2$ ist er jedoch wesentlich größer, was sofort einzusehen ist, wenn man die Breite $\overline{l_2\,l}$ mit $\overline{l_1\,l} = \overline{k_1\,k}$ vergleicht.

Rechnet man daher die Verminderung des P_Δ nach β), also mit gleichem Flächenverluste in $\sigma_2\, 1 . 2$ und $\sigma_1\, 2$, so hat man noch die Druckdifferenzkörper an den Schaufeln zu berücksichtigen, und es ergibt sich daher für die Berechnung von P_Δ für den allgemeinen Fall:

$$P_\Delta^{(2)} = -\gamma . F_\Delta . 2\, r_\Delta \pi + \gamma . z_1 . s_1 . F_\Delta + \gamma . z_1 . v =$$

$$= -k_1 . \gamma . F_\Delta . 2\, r_\Delta \pi + \gamma . z_1 . v =$$

$$= -\gamma . F_\Delta . 2 r_\Delta \pi . \left(k_1 - \frac{z_1 . v}{F_\Delta . 2\, r_\Delta \pi} \right).$$

Setzt man das Verhältnis:

$$\frac{z_1 . v}{F_\Delta . 2\, r_\Delta \pi} = n \text{ und } k_1 - n = k_2,$$

so wird schließlich **unter Berücksichtigung des Flächenverlustes und der Druckdifferenzen an den Schaufeln, infolge der endlichen Stärke derselben,** P_Δ zu rechnen sein aus:

$$\boldsymbol{P_\Delta^{(2)} = -k_2 . \gamma . F_\Delta . 2\, r_\Delta \pi \; kg = k_2 . P_\Delta},$$

mit

$$k_2 = k_1 - \frac{z_1 . v}{F_\Delta . 2 r_\Delta \pi}$$

und

$$k_1 = 1 - \frac{z_1 . s_1}{2\, r_\Delta \pi}.$$

Schätzt man $n = 0{\cdot}10$,

so folgt $k_2 = 0{\cdot}75$.

Die einzelnen Größen sind in denselben Maßen einzusetzen, wie in der für unendlich dünne Schaufeln giltigen Gleichung.

Zu erwähnen wäre noch der Fall, bei welchem der Zylinderschnitt der Schaufel von $\overline{k_1 k}$ zunimmt wie im Falle γ) bis zu einem Größtwerte, von welchem an jedoch eine Abnahme auf $\overline{l_1 l} = \overline{k_1 k}$ eintritt. In diesem Falle entstehen die sichelförmigen Druckdifferenzflächen

$$a_1\, c\, o_1\, a_1 \text{ bezw. } a_0\, c_0\, o_1\, a_0.$$

Die Druckdifferenzkörper an den Schaufeln erhalten dann die durch Abb. 6 *d* (Taf. I) dargestellte Form; sie bauen sich ebenfalls über F_Δ auf.

Für den achsialen hydraulischen Gesamtdruck P_Δ ergibt sich nunmehr folgender **Rechnungsvorgang:**

Der achsiale hydraulische Gesamtdruck wird zunächst für unendlich dünne Schaufeln ermittelt. Hierauf wird die endliche Schaufelstärke nach β) so berücksichtigt, als ob der Zylinderschnitt der Schaufel gleiche horizontale Breite hätte. Ist dies nicht der Fall, so sind noch die Druckdifferenzkörper an den Schaufeln nach γ) zu ermitteln.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß bei der Ermittlung des Einflusses der endlichen Schaufelstärke auf P_Δ so vorgegangen wurde, als ob die dem Saugraume zugekehrten Enden der Schaufeln durch die Austrittsrotationsfläche abgeschnitten würden, was in Wirklichkeit nicht der Fall ist, da die Schaufelenden die in Abb. 6 *b* (Taf. I) punktiert angedeutete Form haben. Doch wird dadurch die frühere Untersuchung und ihr Ergebnis nicht beeinflußt, wenn man nur bei der Bestimmung der Zylinderschnitte die maßgebende obere Austrittskante der Schaufel zugrunde legt. Das in den Saugraum tauchende Dreieck $l \lambda l_2 l$ gibt bei der Bildung der Druckdifferenz an der Schaufel gegenüber dem Drucke auf $l\, l_2$ einen um $l \lambda l_2 l$ größeren nach aufwärts, welcher Überschuß aber durch den gleich großen von der aus Wasser gedachten Schaufel herrührenden nach abwärts wirkenden aufgehoben wird.

Was die Zuverlässigkeit der Voraussetzung unveränderlichen Druckes im selben Parallelkreise anbelangt, so ist darüber folgendes zu sagen:

Die Strömung soll im Laufrade derart erfolgen, daß an jeder beliebigen Stelle eine Schaufel eingebaut werden kann, ohne daß dadurch eine Änderung in den Druck- und Geschwindigkeitsverhältnissen eintritt. Denken wir uns die Schaufel, welche wir einbauen wollen, sei unendlich dünn, so kommen wir mit der Formgebung derselben nur dann nicht in Verlegenheit, wenn die Begrenzungsflächen der vorhandenen Schaufeln von endlicher Stärke derart gebildet sind, daß die eine durch Drehung um die Turbinenachse aus der anderen entstanden ist. Diese Bildung der Schaufel ist aber vorauszusetzen, wenn die Strömung im Laufrade eine gleichartige und der Druck im selben Parallelkreise unveränderlich sein soll. Vollständig trifft dies nur bei unendlich vielen Schaufeln und bei verlustfreier Strömung zu.

Bei einer solchen Schaufel würde der Fall β) vorliegen, bei welchem keine Druckdifferenzkörper an der Schaufel entstehen. Dies wäre allerdings für die Entlastung des Zapfens günstig; aber bei einer so geformten Schaufel nimmt die Stärke im Zylinderschnitte nach außen proportional mit dem Halbmesser zu, was selbst unter der Annahme der kleinsten zulässigen Abmessung im innersten Parallelkreise 2 leicht auf eine zu große Wandstärke im Eintrittsquerschnitte führen und die mit letzterer verbundenen Nachteile nach sich ziehen würde.

Es wird daher in der Regel der Fall γ) vorliegen, für welchen aber das früher angegebene Verfahren für die Bildung der Druckdifferenzkörper an den Schaufeln insoferne eine Näherung vorstellt, als für diesen Fall der Druck in demselben Parallelkreise nicht mehr unveränderlich ist. Es herrscht dann auch im Zylinderschnitte auf beiden Seiten der Schaufel in derselben Höhe nicht mehr derselbe Druck.

Für unendlich dünne Schaufeln würde sich bei unserer Turbine ergeben:

$$P_\Delta \backsim -5500\ kg.$$

Setzt man den Fall γ) voraus und bleibt man bei $k_2 = 0{\cdot}75$, so wäre unter Berücksichtigung der endlichen Schaufelstärken

$$P_\Delta^{(2)} \backsim -4100\ kg.$$

Stellt man $P_\Delta^{(2)}$ als Ringzylinder über der Bodenfläche $(D_1{}^2 - d^2)\ \frac{\pi}{4}$ dar, so erhält dieser eine Höhe von $h_\Delta^{(2)}$, welche sich rechnet aus

$$1000\,.\,(2{\cdot}4^2 - 0{\cdot}22^2)\,.\,\frac{\pi}{4}\,.\,h_\Delta^{(2)} = 4100$$

mit

$$h_\Delta^{(2)} = 0{\cdot}92\ m.$$

Der **achsiale Schaufeldruck** Z_q ergibt sich aus

$$R_z = P_\Delta + Z_q$$

mit

$$Z_q = R_z - P_\Delta.$$

Für unsere Turbine wäre

$$Z_q = -2090 + 4100 = +2010\ kg.$$

Z_q gibt einen Ringzylinder über $(D_1{}^2 - d^2)\,.\,\frac{\pi}{4}$ mit der Höhe

$$h_q = 0{\cdot}46\ m.$$

Könnte man die Schaufeln für sich mit der Welle verbinden, wie bei dem österr. Patente Kl. 88, Nr. 20568 („Z. d. Österr. Ing.- u. Arch.-Vereines“ 1906, Heft 4, S. 63), zu welchem die Abb. 29 (S. 72) gehört, so würde Z_q den hydrodynamischen Teil des Zapfendruckes angeben. Doch wäre wegen der Spalte zwischen den Schaufeln und den Kränzen bei der Berechnung von Z_q der für unendlich dünne Schaufeln giltige Wert von P_Δ zugrunde zu legen. Vergleichsweise ergäbe sich für diesen Fall bei unserer Turbine:

$$Z_q = -2090 + 5500 = +3410\ kg.$$

Bei der in Rede stehenden Anordnung entfällt der hydrostatische Teil des Spurdruckes, da Kranz und Boden als Teile des Gehäuses nicht mit der Welle verbunden sind.

Die letzten Berechnungen beanspruchen keine größere Genauigkeit als nach der üblichen Schaufelungsweise zu erwarten ist. Eine genaue Verfolgung der Wasserbewegung ist nur möglich, wenn diese von vornherein nach bestimmten Gesetzen geführt wird, wie dies bei der Theorie von Lorenz geschieht, nach welcher der Spurdruck im Abschnitte IV behandelt wurde.

c. Die Gewichtsanteile des Laufrades, der Welle und der sonstigen Bauteile, welche mit der Welle verbunden sind.

6. Laufrad.

Unter Nummer 2 (S. 12) wurde bereits das ganze Laufrad, Nabe, Boden, Kranz und Schaufeln, mit einem spezifischen Gewichte $\gamma = 1000\ kg/m^3$ berücksichtigt, d. h. gerade jener Betrag seines Gesamtgewichtes, welchen es im Wasser infolge des Auftriebes verliert.

Es ist somit noch das ganze Rad mit einem spezifischen Gewichte

$$\gamma_r - \gamma$$

in Rechnung zu setzen, wenn mit γ_r das spezifische Gewicht des Radmateriales bezeichnet wird.

Ist G_r das Gewicht des Rades in der Luft in kg,
G_r' das Gewicht des Rades im Wasser in kg,
V_r der Rauminhalt des Rades in m^3, so wird

$$\left.\begin{aligned} G_r &= V_r \cdot \gamma_r, \\ G_r' &= V_r (\gamma_r - \gamma), \end{aligned}\right\} \frac{G_r'}{G_r} = 1 - \frac{\gamma}{\gamma_r},$$

$$G_r' = \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_r}\right) . G_r\ kg.$$

Ist das ganze Rad aus Gußeisen mit $\gamma_r = 7250\ kg/m^3$, so wird

$$G_r' = 0{\cdot}87\ G_r\ kg.$$

Um diesen Betrag wird der Zapfendruck vergrößert.

Für unsere Turbine wird mit $G_r = 3000\ kg$

$$G_r' = +\ 2700\ kg$$

angenommen werden können.

7. Welle.

Es wurde gleich eingangs vorausgesetzt, daß der Durchmesser der Welle, wenigstens im Wasser, überall der gleiche sei.

Die Teile der Welle, welche im Oberwasser bis zum Deckel, und jene, welche im Raume S_1 liegen, können keinen Auftrieb erfahren, weil der Wasserdruck allenthalben radial gerichtet ist.

Im Saugraume erfährt die Welle einen Druck nach aufwärts, welcher sich wie folgt berechnet:

Die untere Stirnfläche der Welle (Abb. 6, Taf. I) liege um $H_w\,m$ über *U. W.*; in dieser Höhe herrscht ein absoluter Druck, der gemessen wird durch die Druckhöhe

$$h_w = h_a - H_w,$$

welche sich in der Abbildung sofort wieder ergibt durch die lotrechte Entfernung der unteren Stirnfläche von der Ebene *O O*.

Nach aufwärts wirkt somit auf die Welle der Druck:

$$P_u = f \,.\, h_w \,.\, \gamma = f\,(h_a - H_w) \,.\, \gamma\ kg.$$

Die obere Stirnfläche der Welle liegt in der Atmosphäre, erfährt daher einen Druck nach abwärts von der Größe

$$P_0 = f \,.\, h_a\,\gamma\ \ kg.$$

Es bleibt daher nach abwärts:

$$f\,(h_a - h_a + H_w) \,.\, \gamma = P_0 - P_u,$$

$$\boldsymbol{P_0 - P_u = f \,.\, H_w \,.\, \gamma\ \ kg},$$

d. i. das Gewicht der an der Welle hängenden Saugsäule; sie ist in der Abb. 6 (Taf. I) rechts ansteigend enger schraffiert.

Der Anteil der Welle am Zapfendrucke ist somit:

$$\boldsymbol{P_w = G_w + f \,.\, H_w \,.\, \gamma\ kg},$$

in welcher Gleichung bedeuten:

G_w das volle Gewicht der ganzen Welle in *kg*;
f den Wellenquerschnitt in m^2;
$\gamma = 1000\ kg/m^3$;
H_w die Höhe der unteren Wellenstirne über *U. W.* in *m*.

Der Anteil der Welle am Zapfendrucke ist somit größer als ihr volles Gewicht, da die Welle in den Saugraum hineingesaugt wird. Das gilt auch bei achsialen Überdruckturbinen im Saugrohr.

Genau genommen wird durch die Welle der Druck auf den Zapfen abhängig von der Höhenlage der Turbine über *U. W.*, weil von dieser H_w abhängig ist.

$P_1^{(1)}$ ist unabhängig von der Höhenlage; denn um denselben Zylinder, um welchen der unter 1. (S. 10) behandelte Teil bei der Tieferlegung zunimmt, wächst auch der unter 3. (S. 12) ermittelte, nach aufwärts wirkende Teil, da die Höhe der Ebene *O O* über *U. W.* unveränderlich $h_a = 10\,m$ bleibt.

So wie bei der vollen Welle ist auch bei der hohlen vorzugehen; bei Wellenverstärkungen ist sinngemäß zu verfahren.

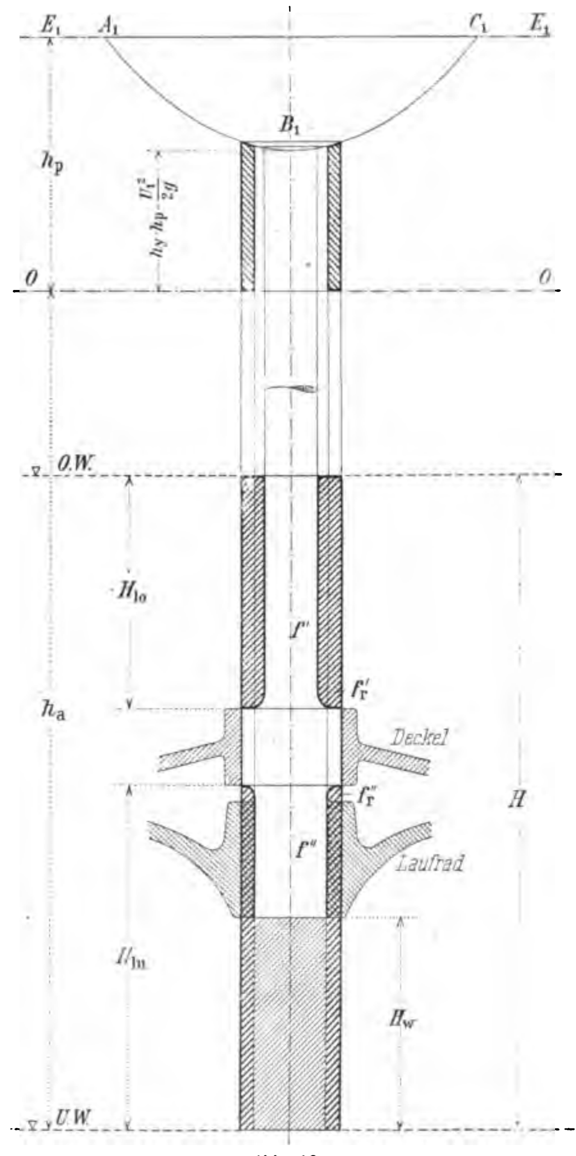


Abb. 10.

Hätte beispielsweise die Welle unserer Turbine die in Abb. 10 (S. 37) gezeichnete Form, so würde sich ihr Anteil am Zapfendrucke zusammensetzen aus dem nach abwärts wirkenden Drucke:

$$P_0 = f' \cdot h_a \cdot \gamma + f_r' (h_a + H_{lo}) \cdot \gamma;$$

aus dem nach aufwärts wirkenden:

$$P_u = f'' \cdot (h_a - H_w) \cdot \gamma + f_r'' (h_a - H_{lu} + h_y) \cdot \gamma$$

und aus dem vollen Gewichte G_w.

Nun ist

$$P_0 - P_u = \gamma [f' \cdot h_a + f_r' \cdot h_a] - \gamma [f'' h_a + f_r'' h_a] + \\ + \gamma [f_r' \cdot H_{lo} + f'' \cdot H_w + f_r'' \cdot (H_{lu} - h_y)];$$

da

$$f' + f_r' = f'' + f_r'',$$

so wird

$$\boldsymbol{P_0 - P_u = [f_r' \cdot H_{lo} + f'' \cdot H_w + f_r'' (H_{lu} - h_y)] \cdot \gamma},$$

in welcher Gleichung

$$h_y = h_p - \frac{U_1^2}{2g} \text{ ist.}$$

Die positiven belastenden Glieder sind in der Abb. 10 (S. 37) nach rechts ansteigend, das negative entlastende Glied ist nach links ansteigend schraffiert.

Mit f' und f'' sind die Wellenquerschnitte, mit f_r' und f_r'' die Ringflächen der Verstärkung bezeichnet; sie sind in m^2 einzusetzen.

Der Anteil der Welle am Zapfendrucke wäre somit für diesen Fall

$$\boldsymbol{P_w = G_w + (P_0 - P_u)\ kg.}$$

Bei Kuppelungsflanschen, welche im Wasser liegen, ist für den über die Welle vorstehenden ringförmigen Teil der Auftrieb wie gewöhnlich zu berücksichtigen.

Für unsere Turbine wäre:

$L = 7{\cdot}5\ m$ die Länge der Welle,
$H_w = 3{\cdot}5\ m$ die Höhe der Saugsäule,
$\gamma_w = 7850\ kg/m^3$ das spezifische Gewicht des Wellenmaterials (Stahl),
$f = 0{\cdot}038\ m^2$ der Wellenquerschnitt ($d = 0{\cdot}22\ m$),

daher

$$\left.\begin{aligned} G_w &= 2337\ kg, \\ f \cdot H_w \cdot \gamma &= 114\ kg, \end{aligned}\right\} \boldsymbol{P_w = +\ 2451\ kg.}$$

8. Zapfenkörper.

Das Gewicht des Glockenzapfens kann mit

$$\boldsymbol{G_g = +\ 300\ kg}$$

angenommen werden und ist mit seinem vollen Betrage belastend in Rechnung zu stellen.

9. Zahnrad.

Will man mit Zahnrädern übertragen, so wäre bei einer Übersetzung auf die horizontale Übertragungswelle

$$1:3$$

für das Kegelkammrad auf der Turbinenwelle bei einer Zähnezahl

$$z = 90$$

$$\text{mit } k = 8{\cdot}5\, kg/cm^2 \text{ in } P = k\,.\,b\,.\,t$$

$$\text{und } \Psi = 3{\cdot}5 \qquad \text{in } b = \Psi\,.\,t$$

die Teilung:

$$t = 10\,.\sqrt[3]{\frac{450\,.\,N}{k\,.\,\Psi\,z\,.\,n}} = 12{\cdot}6\; cm,$$

$$t = 126\; mm \backsim 40\,\pi = 125{\cdot}66\; mm$$

und die Zahnbreite $b = 450\, mm$.

Der mittlere Durchmesser wird

$$D = 3{\cdot}6\; m.$$

Bei diesen Abmessungen wird sich das Gewicht des Kammrades ungefähr ergeben mit

$$G_z = +\ 7500\; kg,$$

um welchen Betrag der Spurdruck vergrößert wird.

Bezeichnet man das Gewicht der über Wasser liegenden mit der Welle verbundenen Bauteile mit G_k, so ist in unserem Falle

$$G_k = G_g + G_z = +\ 7800\; kg.$$

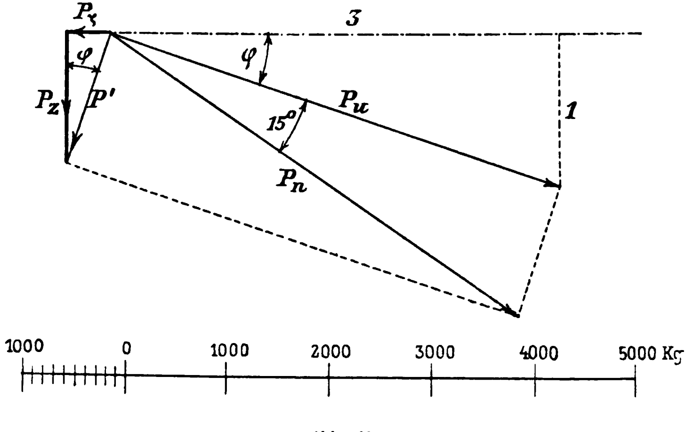


Abb. 11.

d. Die von der Übertragung herrührenden achsialen Kräfte.

10. Die achsiale Zahndruckkomponente bei Kegelrädern.

Im mittleren Durchmesser von $D = 3{\cdot}6\ m$ herrscht die Umfangsgeschwindigkeit

$$u = \frac{n\,D\,\pi}{60} = \frac{60{\cdot}5\,.\,3{\cdot}6\,.\,\pi}{60} = 11{\cdot}4\ m/\text{Sek.}$$

Die Umfangskraft wäre, Abb. 11 (S. 39) und 12 (letztere zur Veranschaulichung der Zerlegung im Raume für eine Übersetzung 1 : 2 gezeichnet), $P_u = \frac{75\,.\,N_e}{u} = \frac{75\,.\,725}{11{\cdot}4} = 4770\,kg.$

Die Zahndruckkomponente P_z parallel zur Turbinenachse rechnet sich aus $\mathbf{P_z = P_u \,.\, tg\ 15^0\,.\,cos\ \varphi}$; nun ist bei der Übersetzung 1:3 $\text{tg}\ \varphi = \frac{1}{3}$, daher $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ und $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $P_z = P_u\,.\,\frac{3}{\sqrt{10}}\,.\,\text{tg}\ 15^0$, $\mathbf{P_z = 1214\ kg.}$

Die Komponente parallel zur Übertragungswelle wäre

$$P_\varsigma = P_u\,.\,\text{tg}\ 15^0\,.\,\sin\varphi = P_u\,.\,\frac{1}{\sqrt{10}}\,.\,\text{tg}\ 15^0,$$

$$P_\varsigma = 405\ kg = \frac{1}{3}\ P_z.$$

Diese Werte gelten für Evolventenverzahnung [18]). Für Zykloidenverzahnung können sie als Mittelwerte genommen werden, sowohl im Falle der Belastung (P_z nach abwärts) als auch im Falle der Entlastung (P_z nach aufwärts) von gleicher absoluter Größe. Der erste Fall tritt ein, wenn das Kammrad unter der Übertragungswelle liegt, der zweite Fall, wenn es über derselben angeordnet wird.

Bei unserer Turbine ist

$$\mathbf{P_z = \pm\ 1214\ kg.}$$

C. Vorkehrungen im Raume S_1 zur Entlastung des Zapfens.

(Tafel II mit den Abb. 13 bis 18).

Die Übersichtlichkeit in der Bezeichnung und die Gleichförmigkeit im Gange der Untersuchungen empfehlen es, die nicht entlastete Turbine an die Spitze dieses Abschnittes zu stellen.

---

[18]) Bach. Maschinenelemente 1903 Tafel 10. Abb. 93.

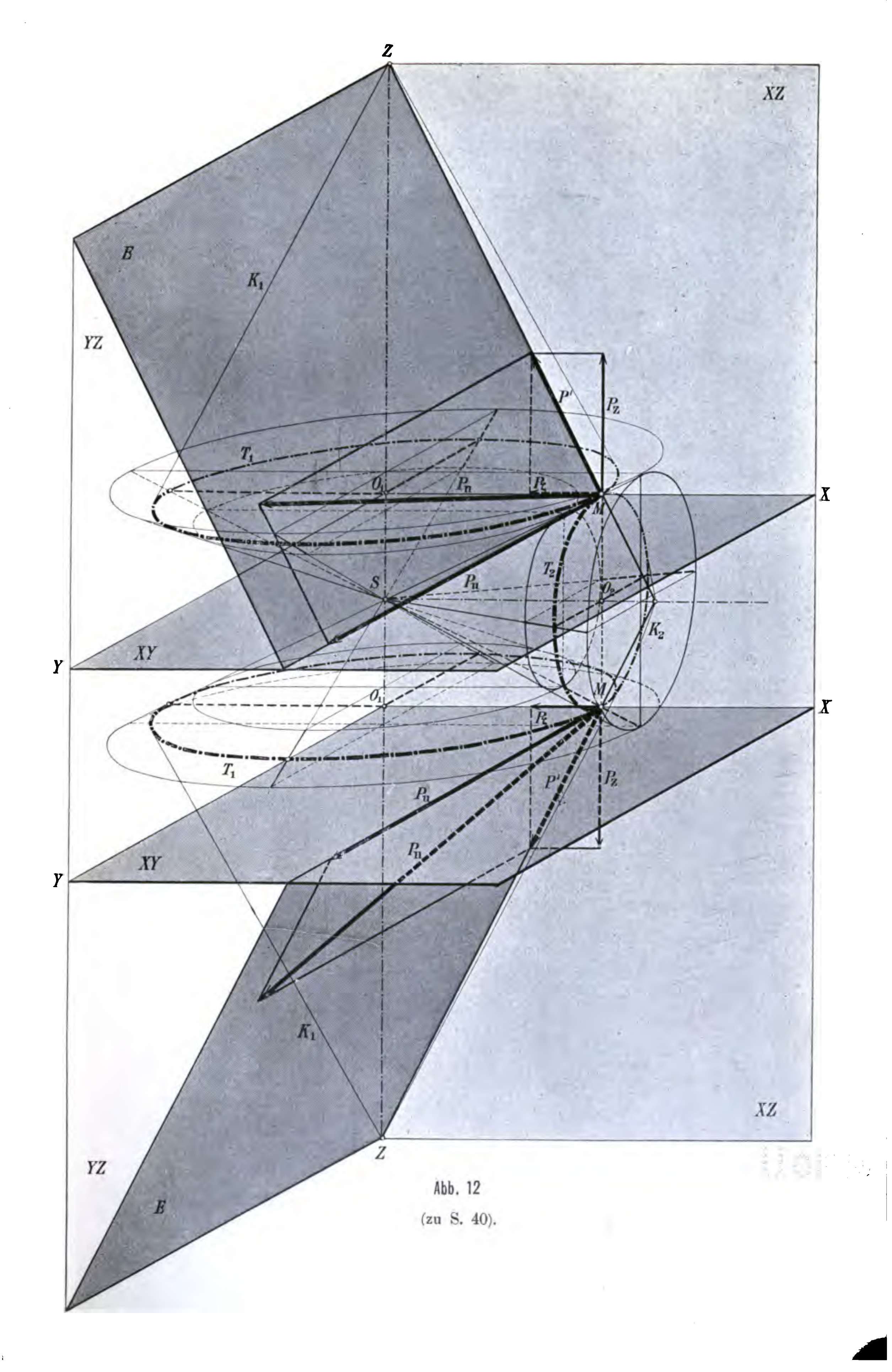

Z
XZ
B
K_1
YZ
P'
P_z
T_1
O_1
P_n
P_t
M
X
T_2
S
P_n
O_2
K_2
XY
Y
M
X
O_1
P_t
T_1
P'
P_z
P_n
P_n
XY
Y
K_1
XZ
Z
YZ
E

Abb. 12

(zu S. 40).

1. Die nicht entlastete Turbine.

(Abb. 13, Tafel II).

Der ihr zugehörige Wert der Größe $P_1^{(1)}$ wurde im Abschnitte B), Nummer 1, 2 und 3 ermittelt (Gleichung auf S. 16).

Die Mittel, welche zur Verkleinerung der hydrostatischen Last P_1 angewendet werden können, sind die folgenden:

2. Anbringung von Rippen auf dem Laufrade, keine Ausgleichsöffnungen.

(Abb. 14, Tafel II).[19]

Die Winkelgeschwindigkeit des Wassers in S_1 wird dadurch gleich der Winkelgeschwindigkeit des Rades, also

$$\Omega = \omega,$$

damit

$$U_1 = u_1.$$

Der Scheitel des Paraboloides sinkt nach B_2 in die Tiefe:

$$\overline{Z B_2} = \frac{R_1^2 \omega^2}{2g} = \frac{u_1^2}{2g}.$$

Die Größe $P_1^{(2)}$, die hydrostatische Last, ist jetzt gegeben durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers $A_2 B_2 C_2 L K A_2$ — Kern von Wellenstärke $\overline{B_2 B_4}$; oder nach Verwandlung des Paraboloides $A_2 B_2 C_2$ in einen Zylinder durch $M_2 N_2 L K M_2$ — Kern $\overline{B_2 B_4}$.

Hiebei ist

$$\overline{A_2 M_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{Z B_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_1^2}{2g}.$$

Es rechnet sich somit $P_1^{(2)}$ aus der Gleichung

$$P_1^{(2)} = + \frac{\pi}{4} D_1^2 \cdot \left(h_p - \frac{1}{2} \cdot \frac{u_1^2}{2g}\right) \cdot \gamma - f\left(h_p - \frac{u_1^2}{2g}\right) \gamma \; kg.$$

Für unsere Turbine wäre:

$$P_1^{(2)} = \frac{\pi}{4} \cdot 2{\cdot}4^2 \left(3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{7{\cdot}6^2}{2.9{\cdot}81}\right) .1000 - 0{\cdot}038\,(3 - 2{\cdot}96)\,1000 =$$
$$= 6876 - 2, \; .$$
$$P_1^{(2)} = + 6874 \; kg.$$

Der positive Teil von $P_1^{(2)}$ muß um das dreifache Gewicht des Paraboloides $A_1 B_1 C_1$ kleiner sein als der positive Teil von $P_1^{(1)}$.

---

[19]) Vergleiche hiezu auch Abb. 4, Parabel $A_1 B_1' C_1$ und die Folgerung β) auf S. 7.

Das Gewicht des Paraboloides $A_1\ B_1\ C_1$ ist:

$$1000 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D_1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1^2}{2g} = 4{\cdot}524 \cdot 0{\cdot}37 \cdot 1000 = 1674\ kg,$$

$$1674 \cdot 3 = 5022 = 11898 - 6876.$$

Durch die Anbringung von Rippen auf dem Laufrade hat somit eine Entlastung um

$$P_1^{(1)} - P_1^{(2)} = 4938\ kg$$

stattgefunden.

3. Anbringung von Ausgleichsöffnungen im Laufradboden.

(Abb. 15, Tafel II).[20]

Die Ausgleichsöffnungen $A_i\ A_i$ seien im Kreise vom Durchmesser $2\ \rho_1$ angeordnet, welcher sich aus der Zeichnung der Turbine ergibt; er soll zum Zwecke eines wirksamen Ausgleiches möglichst groß sein.

Vorausgesetzt wird nun, daß die Öffnungen $A_i\ A_i$ sehr groß seien, daß durch den Deckel eine Verengung zwischen σ_1 und $A_i\ A_i$ nicht hervorgerufen wird, und daß im Spalte σ_1 beträchtliche Widerstände angeordnet sind, derart, daß er als geschlossen angesehen werden kann.

Der Deckelraum steht jetzt mit dem Saugraume in Verbindung, und für das Paraboloid wird die absolute Druckhöhe in $A_i\ A_i$ maßgebend sein.

Diese ist

$$h_A = h_a - H_A,$$

aus der Abb. 15 (Taf. II) sofort erhältlich zwischen der Parallelkreisebene $A_i\ A_i$ und der Ebene $O\ O$.

Die Winkelgeschwindigkeit des Wassers im Raume S_1 ist jetzt wieder gleich der halben des Rades

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot \omega;$$

es wird daher für die Druckverteilung und für den Gesamtdruck wieder das Paraboloid $A_1\ B_1\ C_1$ zur Geltung kommen, aber so weit gesenkt, bis der Parallelkreis vom Durchmesser $2\ \rho_1$ in die Ebene $O\ O$ zu liegen kommt, was in der Lage $A_3\ B_3\ C_3$ erfolgt.

Nach den Entwicklungen des Abschnittes *B*), Nummer 1, 2, 3 ist P_1, für den vorliegenden Fall mit $P_1^{(3)}$ bezeichnet, wie folgt zusammenzusetzen (Abb. 15, Taf. II):

Nach abwärts wirkt:

$$A_3\ B_3\ C_3\ \underbrace{6, 5, 4, 3, 2, 1}_{\text{unten}}\ A_3 \text{ — Kern von Wellenstärke unter } B_3$$

---

[20]) Vergleiche hiezu auch Abb. 3, Parabel $A_3\ B_3\ C_3$ für den Ringspalt $X\ Y$, S. 6.

oder nach Verwandlung von $A_3 B_3 C_3$ in den Zylinder

$$M_3 N_3 B B M_3$$

$M_3 N_3 6, 5, 4, 3, 2, 1, M_3$ — Kern von Wellenstärke unter B_3, was sich auch zusammensetzen läßt aus

x) $M_3 N_3 B B M_3 + B B$ 6, 5, 4, 3, 2, 1 — Kern unter B_3.
Nach aufwärts wirkt:
$K L$ 6, 5, 4, 3, 2, 1 K — Kern unter $O\ O$.
Läßt sich zusammensetzen aus:

y) $K L B B K + B B$ 6, 5, 4, 3, 2, 1 — Kern unter $O\ O$.
Subtrahiert man y) von x), so bleibt:

$$P_1^{(3)} = M_3 N_3 B B M_3 - K L B B K - \text{Kern unter } B_3 + \\ + \text{Kern unter } O\ O$$

oder

$$P_1^{(3)} = + M_3 N_3 L K M_3 + \text{Kern von der Höhe } \overline{KB}.$$

Bezeichnet man wieder mit U_1 die Umfangsgeschwindigkeit des Wassers in S_1 im Kreise vom Durchmesser D_1, so wird:

$$M_3 N_3 B B M_3 = \frac{\pi}{4} . D_1^2 . \frac{1}{2} . \frac{U_1^2}{2g},$$

ferner:

$$K L B B K = \frac{\pi}{4} D_1^2 . \overline{KB},$$

$$\overline{KB} = \frac{\rho_1^2 \Omega^2}{2g} = \frac{U_{\rho_1}^2}{2g},$$

wenn mit U_{ρ_1} die Umfangsgeschwindigkeit des Wassers in S_1 im Durchmesser $2\rho_1$ der Ausgleichsöffnungen bezeichnet wird,

$$\frac{U_{\rho_1}}{U_1} = \frac{2\rho_1}{D_1}; \quad U_{\rho_1} = \frac{2\rho_1}{D_1} . U_1,$$

$$\overline{KB} = \left(\frac{2\rho_1}{D_1}\right)^2 . \frac{U_1^2}{2g},$$

$$K L B B K = \frac{\pi}{4} . D_1^2 . \left(\frac{2\rho_1}{D_1}\right)^2 . \frac{U_1^2}{2g}.$$

Der Kern von Wellenstärke ist gleich:

$$f . \overline{KB} = f . \left(\frac{2\rho_1}{D_1}\right)^2 . \frac{U_1^2}{2g},$$

wenn wieder mit f der Wellenquerschnitt in m^2 bezeichnet wird.

Es rechnet sich somit jetzt die hydrostatische Last für unseren Fall aus der Gleichung:

$$\boldsymbol{P_1^{(3)}} = + \frac{\pi}{4} . \boldsymbol{D_1^2} . \frac{\boldsymbol{U_1^2}}{\boldsymbol{2g}} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{2\rho_1}{\boldsymbol{D_1}}\right)^2\right] . \gamma + \\ + \boldsymbol{f} . \left(\frac{2\rho_1}{\boldsymbol{D_1}}\right)^2 \times \frac{\boldsymbol{U_1^2}}{\boldsymbol{2g}} . \gamma\ \boldsymbol{kg}.$$

Einzusetzen ist:
D_1 und ρ_1 in m,
f der Wellenquerschnitt in m^2,
$\gamma = 1000\ kg/m^3$,
U_1 in m/Sek.,
$g = 9{\cdot}81\ m$/Sek.^{2}
Im vorliegenden Falle ist

$$U_1 = \frac{1}{2} u_1,$$

und es kann daher auch geschrieben werden:

$$P_1^{(3)} = + \left(\frac{\pi}{4} D_1^2\right) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{u_1^2}{2g}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{2\rho_1}{D_1}\right)^2\right] \cdot \gamma + $$
$$+ f \cdot \left(\frac{2\rho_1}{D_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{u_1^2}{2g}\right) \cdot \gamma \quad kg.$$

Bei praktischen Rechnungen wird man $P_1^{(3)}$ mit Hilfe der Zeichnung bestimmen:

$$\boldsymbol{P_1^{(3)} = + \left[\frac{\pi}{4} \cdot D_1^2 \cdot \overline{M_3 K} + f \cdot \overline{KB}\right] \cdot \gamma\ kg.}$$

$\overline{M_3 K}$ und $\overline{KB}$ werden in m der maßstabrichtigen Zeichnung entnommen, D_1, f, γ, wie oben angegeben, eingesetzt.

Für unsere Turbine wäre mit:

$$2\rho_1 = 0{\cdot}8\ m,$$

$$P_1^{(3)} = 4{\cdot}524 \,.\, 0{\cdot}74 \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{8}{24}\right)^2\right] . \,1000 +$$
$$+ 0{\cdot}038 \left(\frac{8}{24}\right)^2 . \,0{\cdot}74 \,.\, 1000 = 1314 + 3\ kg,$$

$$\boldsymbol{P_1^{(3)} = + 1317\ kg.}$$

Die oben aufgestellte Gleichung für $P_1^{(3)}$ gibt uns den Schlüssel für die weiteren Vorkehrungen.

4. Anbringung von Ausgleichsöffnungen im Laufradboden und von Rippen auf der Innenseite des Deckels.[21])

(Abb. 16, Tafel II).

Durch die Anbringung der Rippen auf der Deckelinnenseite behindern wir das Wasser in S_1 an der Rotation, d. h. wir haben in obiger Gleichung

$$U_1 = 0$$

---

[21]) Eine solche Anordnung findet sich in: Müller, Die Francis-Turbinen. 1905, S. 292. Die Turbinenanlage der Kammgarnspinnerei Bietiegheim, ausgeführt von der Maschinenfabrik Geislingen.

zu setzen; damit wird aber auch

$$P_1^{(4)} = 0,$$

allerdings als Grenzfall für die auf Seite 42 gemachten Voraussetzungen. Dieser Fall ist in Abb. 16 (Taf. II) dargestellt.

Bei Ausgleichsöffnungen im Laufradboden, Rippen auf dem Laufrade anzubringen, wäre verfehlt. Es wäre dann

$$U_1 = u_1,$$

und der Druck würde größer. Es würde für diesen Fall die Parabel $A_3' B_3' C_3'$ der Abb. 15 (Taf. II) gelten, welche kongruent ist mit $A_2 B_2 C_2$ der Abb. 14 (Taf. II).

5. Anbringung von Ausgleichsöffnungen im Deckel im Durchmesser D_1; keine Öffnungen im Laufradboden.

(Abb. 17, Tafel II).

Die Gleichung für $P_1^{(3)}$ (S. 43) zeigt, daß mit zunehmendem ρ_1 $P_1^{(3)}$ kleiner wird; das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung kommt wegen seiner Kleinheit nicht in Betracht. Ordnet man daher die Ausgleichsöffnungen im Deckel an, und verbindet man den um den Deckel herumlaufenden Ringraum durch mehrere Rohre von genügend großem Querschnitte mit dem Saugrohre nach Abb. 17 (Taf. II) oder unmittelbar mit dem $U.W.$, so wird in der Gleichung für $P_1^{(3)}$

$$2\rho_1 = D_1$$

zu setzen sein.

Damit wird

$$P_1^{(5)} = -\frac{\pi}{4} \cdot D_1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1^2}{2g} \cdot \gamma + f \cdot \frac{U_1^2}{2g} \cdot \gamma \; kg.$$

Die hydrostatische Last wird somit negativ, d. h. sie wird zur Entlastung.

Das für die Druckverteilung und für den Gesamtdruck maßgebende Paraboloid muß für diesen Fall kongruent sein mit $A_1 B_1 C_1$ und $A_3 B_3 C_3$. Es muß sich einstellen über der in den Ausgleichsöffnungen stehenden Druckhöhe

$$h_A = h_a - H_A,$$

d. h. es kommt in die Lage $A_5 B_5 C_5$.

Nach abwärts wirkt das Gewicht des zwischen $A_5 B_5 C_5$ und der Unterfläche des Laufrades liegenden Wasserkörpers abzüglich des Kernes von Wellenstärke unter B_5.

Nach aufwärts wirkt das Gewicht des zwischen der Unterfläche des Laufrades und der Ebene OO liegenden Wasserkörpers abzüglich des Kernes unter OO.

Bleibt somit als nach aufwärts wirkender Unterschied das Gewicht des Paraboloides $A_5\,B_5\,C_5$ oder des inhaltsgleichen Zylinders $A_5\,C_5\,N_5\,M_5\,A_5$, beide vermindert um den Kern zwischen OO und B_5. Dieser Unterschied ist die Größe $P_1^{(5)}$, und die oben aufgestellte Gleichung hiefür gibt ihren Wert. Der erste Teil ist der Zylinder, der zweite der Kern. In Abb. 17 (Taf. II) ist der Mittelschnitt links ansteigend schraffiert.

Für unsere Turbine wäre

$$P_1^{(5)} = -4{\cdot}524 \,.\, 0{\cdot}37 \,.\, 1000 + 0{\cdot}038 \,.\, 0{\cdot}74 \,.\, 1000 =$$

$$= -1674 + 28\ kg,$$

$$\boldsymbol{P_1^{(5)} = -1646\ kg.}$$

Bei der Anordnung der Ausgleichsöffnungen im Deckel bei $A_a\,A_a$, also beim äußeren Ausgleich wäre die Anbringung von Rippen auf der Deckelinnenseite wie im Falle 4 von keinem Nutzen; denn es würde wie dort $P_1^{(5)} = 0$, während im Falle 5 $P_1^{(5)} < 0$ ist (Abb. 16 und 17, Taf. II). Beim inneren Ausgleiche bedeuten die Rippen eine Verbesserung (Abb. 15 und 16, Taf. II).

Es dürfte hier der Ort sein, darauf hinzuweisen, daß das Paraboloid $A_3\,B_3\,C_3$ im Falle 3 (Abb. 15, Taf. II), die Druckebene $A_4\,B_4\,C_4$ im Falle 4 (Abb. 16, Taf. II) und das Paraboloid $A_5\,B_5\,C_5$ im Falle 5 (Abb. 17, Taf. II) unterste Grenzlagen darstellen, welche zur Voraussetzung haben, daß durch die Widerstände im Spalt σ_1 der Spaltdruck vollständig abgedrosselt wird, oder daß die auf den Spalt σ_1 folgenden Querschnitte so groß sind, daß von einem Flusse durch S_1 abgesehen und der Saugdruck in diesem Raume angenommen werden kann.

Durch die endlichen Querschnittsverhältnisse im Raume S_1 und durch die endliche Größe der Widerstände in σ_1 erfahren die Grenzlagen eine Verschiebung nach aufwärts.

Im Falle 4, innerer Ausgleich und Rippen auf der Deckelinnenseite (Abb. 16, Taf. II), ist dann, weil das Wasser an der Rotation verhindert wird, die Bewegung des Wassers eine Strömung durch einen Raum mit gegebenen Querschnittsverhältnissen und Drücken am Ein- und Ausflusse. Die Druckverteilung erfolgt nicht mehr nach $A_4\,B_4\,C_4$ in Ebene $O\,O$, sondern nach einer krummen Fläche, welche oberhalb $O\,O$ liegen wird; das Gewicht des Wasserkörpers zwischen dieser Fläche und $O\,O$ gibt dann $P_1^{(4)}$.

Je nach den Querschnitts- und Widerstandsverhältnissen kann diese krumme Fläche jede Lage zwischen dem Kreise $A_4\,C_4$ und dem Kreise $A_1\,C_1$ einnehmen. Diese oberste Grenzlage würde erreicht bei verschlossenen Ausgleichsöffnungen $A_i\,A_i$.

$P_1^{(4)}$ wäre dann gegeben durch das Gewicht des Zylinders $A_1\,C_1\,L\,K\,A_1$ vermindert um den Kern von Wellenstärke zwischen OO und Ebene $A_1\,C_1$.

Bei einer nicht ausgeglichenen Turbine (Abb. 13, Taf. II) wären somit Rippen auf der Deckelinnenseite eine verfehlte Vorkehrung, welche den Größtwert des Zapfendruckes hervorbringen würde.

Im Falle 3, innerer Ausgleich (Abb. 15, Taf. II), entfernt sich die Druckverteilung umsomehr vom Paraboloide $A_3\,B_3\,C_3$, je deutlicher der Fluß durch S_1 erfolgt. Die Bewegung ist dann keine rotierende mehr, sondern nähert sich einer kreisenden, zu deren genauen Verfolgung im Raume S_1 die Grundlagen völlig unklare sind. Je ungünstiger die Querschnitts- und Widerstandsverhältnisse sind, desto höher rückt die an die Stelle von $A_3\,B_3\,C_3$ tretende Druckverteilungsfläche; sie erreicht ihren Grenzwert bei ganz geschlossenen Ausgleichsöffnungen $A_i\,A_i$ in dem Paraboloide $A_1\,B_1\,C_1$.

Es tritt dann eben der Fall der unausgeglichenen Turbine ein.

Im Falle 5, äußerer Ausgleich (Abb. 17, Taf. II), bleibt die Druckverteilung nach einem zu $A_5\,B_5\,C_5$ kongruenten Paraboloide auch für endliche Querschnitts- und Widerstandsverhältnisse in σ_1 und $A_a\,A_a$ bestehen, weil die Bewegungsverhältnisse in S_1 durch den außen zwischen σ_1 und A_a erfolgenden Fluß nicht berührt werden. Je ungünstiger die Querschnitts- und Widerstandsverhältnisse werden, desto höher steigt das Paraboloid $A_5\,B_5\,C_5$, und je kleiner A_a gegen σ_1 wird, desto mehr rückt es nach seiner obersten Grenzlage $A_1\,B_1\,C_1$, welche bei vollständig geschlossenen Ausgleichsöffnungen erreicht wird. Der Fall ist dann wieder der der unausgeglichenen Turbine.

Schlecht ausgeführter äußerer Ausgleich kann ein schlechteres Ergebnis liefern als gut durchgeführter innerer; in diesem Falle würden Rippen auf der Deckelinnenseite eine Verbesserung bedeuten, welche Rippen bei gut durchgeführtem äußeren Ausgleiche das Ergebnis verschlechtern.

Vergleicht man den äußeren und inneren Ausgleich (Fall 5, Abb. 17, und Fall 3, Abb. 15), so erkennt man, daß der erstere das bessere Ergebnis liefert; es tritt Entlastung des Zapfens ein. Der äußere Ausgleich hat auch die Möglichkeit, die Bewegungsverhältnisse theoretisch mit ziemlicher Annäherung verfolgen zu können, voraus. Konstruktiv ist er allerdings umständlicher durchzuführen, und man wird auf die die Saugwirkung des Saugrohres gefährdenden Anschlüsse der Umführungsrohre hinweisen, welche den Saugring $A_a\,A_a$ am Deckel mit dem Saugrohre verbinden. Führt man diese Rohre unmittelbar ins $U.W.$,

so entfällt die Gefahr der Undichtheit für das Saugrohr. Diese Anordnung wird bei liegender Welle einfacher durchzuführen sein; es entfällt hier auch die Vorüberführung der Umführungsrohre vor dem Einlaufquerschnitte der Turbine.

6. Anbringung von Ausgleichsöffnungen im Deckel im Durchmesser D_1 und von Rippen auf dem Laufrade.

(Abb. 18, Tafel II).

Kehren wir zu dem Grenzwerte des Falles 5 zurück, so sieht man aus Abb. 17 (Taf. II), daß eine Verkleinerung des nach abwärts wirkenden Druckes nur durch Senkung des Paraboloidscheitels möglich ist.

Der Parallelkreis $A_5\,C_5$ muß aber in der Ebene $O\,O$ bleiben, weil im Saugring die Druckhöhe

$$h_A = h_a - H_A \text{ ist.}$$

Diese Senkung des Scheitels wird durch Vergrößerung der Winkelgeschwindigkeit des Wassers in S_1 durch Anbringung von Rippen am Rade erreicht. Es wird dann

$$\Omega = \omega,$$
$$U_1 = u_1,$$

und es entsteht das Paraboloid $A_6\,B_6\,C_6$ (Abb. 18, Taf. II), welches kongruent ist mit dem Paraboloide $A_2\,B_2\,C_2$ der Abb. 14 (Taf. II).

Nach abwärts wirkt das Gewicht des Wasserkörpers zwischen dem Paraboloide $A_6\,B_6\,C_6$ und der Unterfläche des Laufrades vermindert um den Kern von Wellenstärke unter B_6.

Nach aufwärts wirkt das Gewicht des Wasserkörpers zwischen $A_6\,C_6$ in Ebene $O\,O$ und zwischen der Unterfläche des Laufrades vermindert um den Kern unter $O\,O$.

Es bleibt somit nach aufwärts das Gewicht des Paraboloides $A_6\,B_6\,C_6$ vermindert um den Kern zwischen $O\,O$ und B_6, in Abb. 18 (Taf. II) links ansteigend schraffiert.

Für die Berechnung wird $A_6\,B_6\,C_6$ in den Zylinder $A_6\,C_6\,N_6\,M_6\,A_6$ verwandelt.

Auch die Gleichung für $P_1^{(3)}$, bezw. die schon mit $2\,\rho_1 = D_1$ umgestaltete für $P_1^{(5)}$ zeigt, daß mit zunehmendem U_1 die hydrostatische Last stärker negativ wird; setzt man in letztere Gleichung

$$U_1 = u_1,$$

so wird

$$P_1^{(6)} = -\frac{\pi}{4} \cdot D_1^2 \cdot \frac{1}{2}\,\frac{u_1^2}{2\,g} \cdot \gamma + f \cdot \frac{u_1^2}{2\,g} \cdot \gamma \text{ kg.}$$

Die Gleichung drückt das Ergebnis der gerade zuvor nach der Abbildung erfolgten Zusammensetzung aus.

Der negative Teil ist der Zylinder, der positive der Kern.

Durch diese Vorkehrung ist die größte Entlastung erreicht, welche mit Rücksicht auf S_1 erzielbar ist.

$A_6\, B_6\, C_6$ stellt auch hier die unterste Grenzlage vor. Infolge der endlichen Querschnitts- und Widerstandsverhältnisse wird die Druckverteilung nach einem höher gelegenen mit $A_6\, B_6\, C_6$ kongruenten Paraboloide erfolgen, welches also noch über $O\,O$ ragende Teile besitzt. Seine oberste Grenzlage ist in $A_2\, B_2\, C_2$ erreicht, welches Paraboloid dem Falle 2) der unausgeglichenen Turbine mit Rippen auf dem Rade zugehört.

Für unsere Turbine wäre:

$$P_1^{(6)} = -4{\cdot}524 \,.\, 1{\cdot}48 \,.\, 1000 + 0{\cdot}038 \,.\, 2{\cdot}96 \,.\, 1000 =$$
$$= -6696 + 112,$$
$$\boldsymbol{P_1^{(6)} = -6584\ kg.}$$

D. Untersuchung der Druckverhältnisse im Raume S_2.

(Tafel III mit den Abb. 19 bis 24).

Bei den Francis-Turbinen normaler Bauart ist die radiale Erstreckung des unteren Kranzes nur gering; es wird daher der Druck im Raume S_2 nur geringen Einfluß auf den Zapfendruck ausüben können. Ist es also hier nur das Interesse, welches zu einer Untersuchung drängt, so werden bei den Francis-Grenzturbinen und bei den amerikanischen Turbinen durch die größere Erstreckung des unteren Kranzes, bei den ersteren nach innen, bei den letzteren nach außen, die Ergebnisse jener Untersuchung zum Bedürfnis.

In den Abbildungen 19 bis 24 (Tafel III) ist nur jener Teil des gesamten Druckes im Raume S_2 gezeichnet, der zwischen der h_a-Ebene OO und der um h_p darüber befindlichen Ebene $E_1 E_1$ liegt; nur dieser Teil kommt von dem in den Abschnitten B) und C) behandelten P_1 weg, weil der unter $O\,O$ gelegene, von dieser bis zur unteren Kranzfläche reichende, von dem nach abwärts wirkenden, unter B) 1 und B) 2 ermittelten, gleich großen absoluten Drucke aufgehoben wird. Es schließen die folgenden Untersuchungen unmittelbar an den Abschnitt B) 3 auf S. 18 an.

Alle die Rotationskörper der Abb. 19 bis 24 (Taf. III) bauen sich über dem Kreisringe von der Breite $\frac{1}{2}\,(D_1 - D_3)$

auf, füllen den Raum zwischen den Zylindermänteln vom Durchmesser D_1 außen, D_3 innen und werden oben von einem Paraboloïdringe oder eben begrenzt.

Die radiale Breite ist in den Abbildungen größer angenommen als bei normalen Francis-Turbinen derzeit üblich, um die Verhältnisse deutlich verfolgen zu können.

Sämtliche Ringkörper bedeuten für $D_1 > D_3$ (normale und Grenzturbinen) Entlastungen.

Für $D_1 < D_3$ (amerikanische Turbinen) können unter Umständen daraus beträchtliche Belastungen des Zapfens erwachsen.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf $D_1 > D_3$. Die Verhältnisse bei den amerikanischen Turbinen werden später behandelt.

a. Widerstände im Spalt σ_2.

1. Spalt σ_3 offen gegen das Saugrohr, Rippen am Saugrohr.

(Abb. 19, Tafel III).

Die Widerstände seien so groß, daß ihre Wirkung dem vollständigen Abschlusse von σ_2 gleichkomme.

Das Gewicht der gerade zuvor gekennzeichneten Ringkörper sei mit P_2 bezeichnet; ein Zeiger oben in der Klammer deute die Anordnung an, welcher er zugehört.

In der Höhe des Spaltes σ_3 im Saugrohre wird die absolute Druckhöhe gemessen durch

$$h_{\sigma_3} = h_a - H_{\sigma_3};$$

σ_3 ist gegen das Saugrohr offen, das Wasser ist durch die Rippen an der Rotation gehindert, daher nach aufwärts wirkend das Gewicht des Ringes zwischen der unteren Kranzfläche und der Ebene $O\,O$; dieser Druck wird von einem gleich großen Teile des in $B)$ 1 und $B)$ 2 bestimmten nach abwärts wirkenden Druckes aufgehoben; daher

$$P_2^{(1)} = 0,$$

P_1 erfährt somit keine Änderung.

2. Spalt σ_3 offen gegen das Saugrohr.

(Abb. 20, Tafel III).

Das Wasser im Spaltraume S_2 nimmt an der Rotation teil mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{1}{2}\,\omega.$$

Druckverteilung nach einem mit dem Paraboloide A_1 B_1 C_1 (Abb. 13, Tafel I) kongruenten, mit

$$A_2^u\ B_2^u\ C_2^u$$

bezeichneten, von welchem nur der Ring $A_2^u\ P_3^u$ zur Geltung kommt.

Somit:

$$P_2^{(2)} = -\ \textbf{Gewicht des Wasserringes}\ A_2^u\ P_3^u\ K\ A_2^u.$$

Dieser Fall wurde übrigens schon unter B) behandelt. In diesem Falle wäre P_1 um $P_2^{(2)}$ zu verkleinern.

3. Spalt σ_3 offen gegen das Saugrohr, Rippen am Laufrade.

(Abb. 21, Tafel III).

Winkelgeschwindigkeit des Wassers im Raume S_2

$$\Omega = \omega.$$

Druckverteilung nach einem mit dem Paraboloide A_2 B_2 C_2 (Abb. 14, Tafel II) kongruenten, mit

$$A_3^u\ B_3^u\ C_3^u$$

bezeichneten, von welchem nur der Ring $A_3^u\ P_3^u$ zur Geltung kommt.

Somit:

$$P_2^{(3)} = -\ \textbf{Gewicht des Wasserringes}\ A_3^u\ P_3^u\ K\ A_3^u.$$

$$P_2^{(3)} > P_2^{(2)}\ \text{(Absolutwerte).}$$

b. Widerstände im Spalt σ_3.

4. Spalt σ_2 offen gegen die Turbine, Rippen am Laufrade

(Abb. 22, Tafel III).

Absolute Druckhöhe im Spalt (Ebene $E\,E$)

$$h_1 = h_a - (H_u + H_r) + h_p.$$

Die graphische Darstellung (Abb. 6, Taf. I) vergrößert von selbst diese Druckhöhe um die Entfernung des gewählten Parallelkreises auf der Kranzfläche von der Ebene $E\,E$. Die absolute Druckhöhe reicht dann von diesem Parallelkreise bis zur horizontalen Ebene $E_1\,E_1$, welche h_p oben begrenzt.

Winkelgeschwindigkeit des Wassers in S_2

$$\Omega = \omega.$$

Druckverteilung nach dem Paraboloide $A_4^u\ B_4^u\ C_4^u$ welches kongruent ist mit dem Paraboloide $A_2\ B_2\ C_2$ der Abb. 14 (Taf. II).

Es stellt sich auf über der absoluten Druckhöhe

$$h_1 = h_a - (H_u + H_r) + h_p\ \text{(über } E\,E\text{)},$$

da jetzt der Spaltdruck maßgebend ist.

Sein Parallelkreis $A_4{}^u C_4{}^u$ fällt zusammen mit $A_1 C_1$ und $A_2 C_2$ der Abb. 13 und 14 (Tafel II).

Zur Geltung kommt nur der Ring $A_4{}^u T_4$ (Abb. 22, Taf. III) zwischen den Zylindern D_1 und D_3.

Somit:

$$\boldsymbol{P_2^{(4)} = -} \textbf{ Gewicht des Wasserringes } \boldsymbol{A_4{}^u T_4 P_3{}^u K A_4{}^u}.$$

$$P_2^{(4)} > P_2^{(3)} \text{ (Absolutwerte).}$$

Hätte z. B. das Laufrad auch oben Rippen (Fall C. 2), so würde $A_4{}^u T_4$ (Abb. 22, Taf. III) mit $A_2 B_2 C_2$ (Abb. 14, Taf. II) zusammenfallen, und es bliebe nur der Rotationskörper über D_3.

5. Spalt σ_2 offen gegen die Turbine.

(Abb. 23, Tafel III).

$$\Omega = \frac{\omega}{2}$$

(Abb. 23, Taf. III), Paraboloid $A_5{}^u B_5{}^u C_5{}^u \cong A_1 B_1 C_1$ (Abb. 13, Taf. II).

$$\boldsymbol{P_2^{(5)} = -} \textbf{ Gewicht des Wasserringes } \boldsymbol{A_5{}^u T_5 P_3{}^u K A_5{}^u}.$$

$$P_2^{(5)} > P_2^{(4)} \text{ (Absolutwerte).}$$

6. Spalt σ_2 offen gegen die Turbine, Rippen am Saugrohr.

(Abb. 24, Tafel III).

$$\Omega = 0.$$

Die Druckverteilung wird lediglich durch den Spaltdruck bestimmt; es reichen somit die Druckhöhen bis zur horizontalen Ebene $E_1 E_1$ über h_p, unten sind sie durch die Kranzfläche begrenzt.

Somit:

$$\boldsymbol{P_2^{(6)} = -} \textbf{ Gewicht des Wasserringes } \boldsymbol{A_6{}^u T_6 P_3{}^u K A_6{}^u}.$$

$$\boldsymbol{P_2^{(6)} = -\frac{\pi}{4}(D_1^2 - D_3^2) \cdot h_p \cdot \gamma \; kg.}$$

D_1 und D_3 in m,
h_p in m,
$\gamma = 1000\, kg/m^3$,
$P_2^{(6)} > P_2^{(5)}$ (Absolutwerte).

$P_2^{(6)}$ ist der größte erreichbare Wert.

$$\boldsymbol{P_2^{(6)} = \max P_2}.$$

Für unsere Turbine wäre:

$$D_1 = 2{\cdot}4 \; m,$$
$$D_3 = 2{\cdot}28 \; m,$$
$$h_p = 3{\cdot}0 \; m,$$

$$P_2^{(6)} = -0{\cdot}441\,.\,3\,.\,1000,$$
$$\mathbf{P_2^{(6)} = -1323\ kg.}$$

Durch Annahme von D_3 für die innere Begrenzung rechnet man entschieden zu günstig. Aber wenn man auch bei normalen Turbinen vielleicht P_2 nicht in die Rechnung einbeziehen wird, so sieht man doch, daß eine Anordnung möglich ist, welche eine nicht zu verachtende Reserve bietet.

Die größte hydrostatische Entlastung wird erreicht durch Anordnung von Rippen am Laufrade im Raume S_1, durch äußeren Ausgleich am Deckel, durch Anordnung der Widerstände im Spalt σ_3 und Anbringung von Rippen am Saugrohr im Raume S_2. (Fall *C* 6. mit *D* 6., Abb. 18, Taf. II und 24, Taf. III).

In Abb. 18 (Tafel II) sind die dieser Verbindung entsprechenden Wasserkörper eingezeichnet und links ansteigend schraffiert.

Das Paraboloid $A_6 B_6 C_6$ entspricht $P_1^{(6)} = -6584\ kg$.

Der Zylinder $R_1 R_2 C_6 A_6 R_1$ mit der Höhe $h_R = 0{\cdot}46\ m$ gehört zur achsialen Reaktion $R_z = -2090\ kg$.

Der Zylinder $P_2 P_2 R_2 R_1 P_2$ mit der Höhe $h_{P_2} = 0{\cdot}29\ m$ gehört zu $P_2^{(6)} = -1323\ kg$.

Abb. 18 (Taf. II) zeigt den Grenzwert der hydrostatischen und hydrodynamischen Entlastung.

Es erübrigt noch zu zeigen, wie der Rauminhalt der ringförmigen Wasserkörper ermittelt wird, welche von einem Paraboloidringe, einer Kreisringfläche und außen von einem Zylinder begrenzt werden.

Es handelt sich also um den Ringkörper vom Querschnitte $A X_1 T$ der Abb. 25 (S. 54).

Mit U ist wie bisher die Umfangsgeschwindigkeit in irgend einem Parallelkreise bezeichnet; im besonderen mit

U_1 im Parallelkreise vom Durchmesser D_1,
U_3 im Parallelkreise vom Durchmesser D_3.

Das Paraboloid ist zu ergänzen.

Sein Scheitel B liegt um $\frac{U_1^2}{2g}$ unter $A\,C$.

$$\overline{ZB} = \frac{U_1^2}{2g}.$$

Das Paraboloid wird in einen Zylinder verwandelt

$$\overline{AM} = \overline{MY_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1^2}{2g}.$$

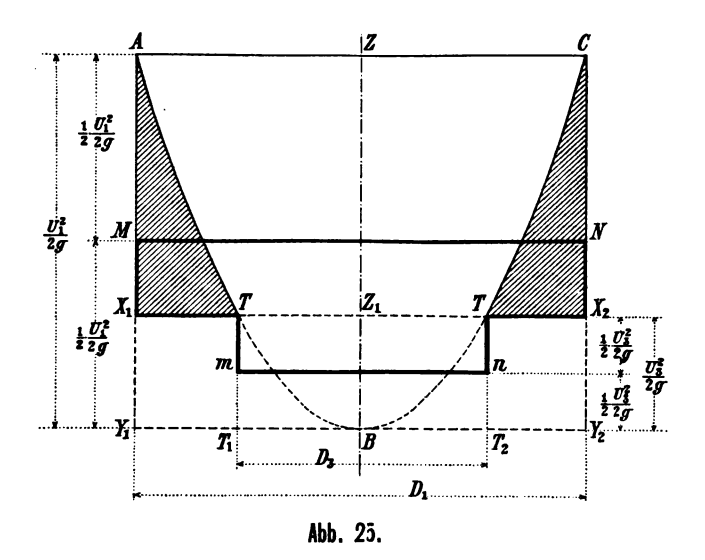


Abb. 25.

Vom Zylinder $M\,N\,Y_2\,Y_1\,M$ hat zu entfallen der Zylinderring $X_1\,T\,T_1\,Y_1\,X_1$ und die Paraboloidkalotte $T\,T\,B\,T$.

Letztere wird in den inhaltsgleichen Zylinder $T\,T\,m\,n\,T$ verwandelt, wobei

$$\overline{Tm} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_3^2}{2g},$$

weil

$$\overline{Z_1 B} = \frac{U_3^2}{2g}.$$

Bleibt somit das gesuchte Volumen, gegeben durch den abgestuften Zylinder mit dem stark ausgezogenen Mittelschnitte $M\,N\,X_2\,T\,n\,m\,T\,X_1\,M$.

$$V = \frac{\pi}{4} D_1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\,\frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_3^2}{2g}\right) + \frac{\pi}{4} D_3^2 \cdot \frac{1}{2}\,\frac{U_3^2}{2g},$$

$$U_3 = \left(\frac{D_3}{D_1}\right) \cdot U_1.$$

$$V = \frac{\pi}{4} D_1^2 \,\frac{U_1^2}{4g} \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2\right]\right\} m^3.$$

D_1 und D_3 in m, U_1 in m/Sek.

Das Gewicht ist dann gleich

$$P_v = V \cdot \gamma \; kg \text{ mit } \gamma = 1000.$$

Auch die Zeichnung führt zum Ziele:

Man halbiere $\overline{Z\,B}$ und ziehe $\overline{M\,N}$ durch den Halbierungspunkt;

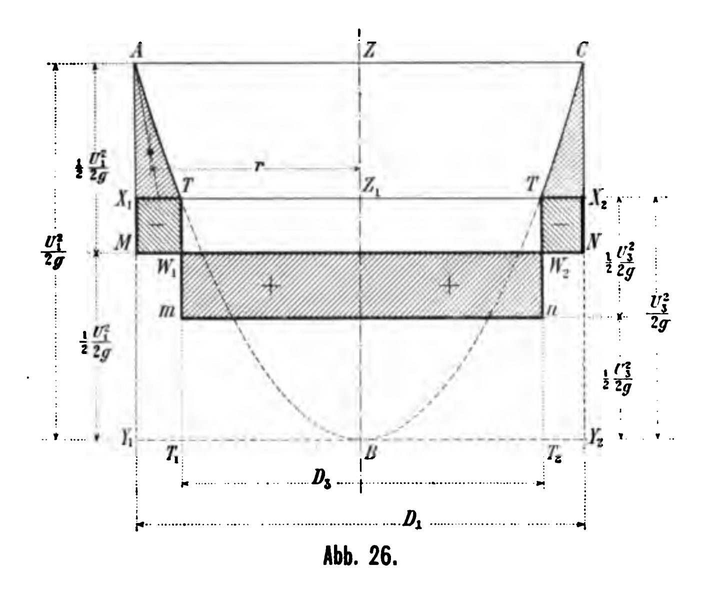


Abb. 26.

man halbiere $\overline{Z_1 B}$ und ziehe $\overline{m\,n}$ durch den Halbierungspunkt,

messe $\overline{M X_1}$ und $\overline{T m}$ am Maßstabe der Abbildung in Metern und erhält

$$V = \frac{\pi}{4} D_1^2 . \overline{M X_1} + \frac{\pi}{4} D_3^2 . \overline{T m} \quad m^3.$$

Ist D_3 nicht viel kleiner als D_1, wie in Abb. 26, dann bleibt die Gültigkeit der oben aufgestellten Gleichung für V bestehen.

Für die graphische Ausmittlung ist wie zuvor zu verfahren.

Man messe $\overline{W_1\, m}$ und $\overline{X_1\, M}$ in m im Maßstabe der Abbildung und erhält

$$V = \frac{\pi}{4} . D_3^2 . \overline{W_1 m} - \frac{\pi}{4} (D_1^2 - D_3^2) . \overline{X_1 M} \quad m^3.$$

Zylinder $W_1\, W_2\, n\, m\, W_1$ ist positiv, der Ringzylinder vom Querschnitte $X_1\, T\, W_1\, M\, X_1$, bezw. $X_2\, N\, W_2\, T\, X_2$ ist negativ in die Rechnung einzuführen, wie aus der Zusammensetzung hervorgeht.

Ersetzt man das Parabelstück $A\ T$ (Abb. 25 u. 26) durch eine Gerade, so ist der Schwerpunkt des Dreieckes $A\, X_1\, T'\, A$ rasch bestimmt, und man erhält angenähert (etwas zu groß) den Rauminhalt V aus:

$$V \backsim 2\, r\, \pi . F \quad m^3,$$

wenn man

F, die Fläche des genannten Dreieckes, in m^2 und
r, den Halbmesser des Schwerpunktskreises, in m einsetzt.

E. Grenzturbinen.

Die absolute Druckhöhe im Spalte (Ebene EE) ist gegeben durch

$$h_1 = h_a - (H_u + H_r) + H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g}.$$

Bei den reinen Grenzturbinen ist wegen

$$H = (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g}$$

$$h_p = 0,$$

$$\boldsymbol{h_1 = h_a - (H_u + H_r)},$$

d. h. alle Erscheinungen in den Räumen S_1 und S_2 müssen sich an der h_a-Ebene $O\,O$ abspielen. Die Verhältnisse können an Hand der Abb. 15—18 (Taf. II) und 19—24 (Taf. III) verfolgt werden.

Die Untersuchung möge in der Reihenfolge der Abschnitte C) und D) durchgeführt werden.

Raum S_1:

1. Kein Ausgleich und keine Vorkehrungen.

$$\Omega = \frac{\omega}{2}.$$

Paraboloid $A_5\,B_5\,C_5$ der Abb. 17 (Tafel II).

Die nicht ausgeglichene reine Grenzturbine gibt somit schon Entlastung. Freilich ist das Paraboloid hier flach, weil u_1 klein.

$$\boldsymbol{P_1^{(1)}} = -\ \textbf{Gewicht}\ \boldsymbol{A_5\,B_5\,C_5} + \textbf{Kern}\ \boldsymbol{B_5\,B_4}.$$

$$\overline{B_5\,B_4} = \frac{U_1^2}{2g}; \qquad U_1 = \frac{u_1}{2}.$$

2. Rippen auf dem Rade, kein Ausgleich.

$$\Omega = \omega.$$

Paraboloid $A_6\,B_6\,C_6$ der Abb. 18 (Tafel II).

$$\overline{B_4\,B_6} = \frac{u_1^2}{2g}.$$

$$\boldsymbol{P_1^{(2)}} = -\ \textbf{Gewicht}\ \boldsymbol{A_6\,B_6\,C_6} + \textbf{Kern}\ \boldsymbol{B_4 B_6}.$$

Diese Anordnung gibt die größte Entlastung.

3. Ausgleichsöffnungen im Laufradboden $A_i A_i$, Widerstände in σ_1.

$$\Omega = \frac{\omega}{2}.$$

Paraboloid $A_3 B_3 C_3$ der Abb. 15 (Tafel II).

$$P_1^{(3)} = + \text{Gewicht } A_3 B_3 C_3 L K A_3 + \text{Kern } \overline{B_4 B_3}$$

ist jedenfalls positiv, weil der über $O O$ liegende positive Teil größer ist als der unter $O O$ liegende negative Teil.

Bei der reinen Grenzturbine hätten somit die Ausgleichsöffnungen keinen Sinn.

Nur wenn eine Reaktionsdruckhöhe

$$h_p > \overline{A_3 K}$$

vorhanden ist, erfüllen sie ihren Zweck.

Bei $h_p = \overline{A_3 K}$ wäre das zugehörige Paraboloid der nicht ausgeglichenen Turbine $A_3 B_3 C_3$. Dieses rückt höher mit zunehmendem h_p.

Sind bei $h_p < \overline{A_3 K}$ Ausgleichsöffnungen vorhanden und in σ_1 keine Widerstände, so wird beständig durch A_i Wasser nach dem Spalte gepumpt.[22])

4. Rippen auf der Deckelinnenseite.

(Abb. 16, Tafel II).

$$\Omega = 0.$$

$$P_1^{(4)} = 0.$$

Auch diese Anordnung hat bei der reinen Grenzturbine keinen Sinn; denn bei der unausgeglichenen Grenzturbine ist

$$P_1^{(1)} < 0.$$

5. Ausgleichsöffnungen im Deckel im Durchmesser D_1.

(Abb. 17, Tafel II).

Diese haben bei der reinen Grenzturbine keinen Zweck, weil die absolute Druckhöhe im Spalte in der Ebene $E E$ gleich ist der absoluten Saugdruckhöhe in $E E$; es kann somit das Paraboloid nicht gesenkt werden, der Fall muß sich vollständig mit dem der unausgeglichenen Turbine decken; es wurde dort auch bereits Abb. 17 (Taf. II) verwendet.

---

22) Vergleiche hiezu den Hinweis auf S. 5 unter „Zentraler Ausgleich bei J".

6. Ausgleichsöffnungen im Deckel im Durchmesser D_1 und Rippen auf dem Rade.

(Abb. 18, Tafel II).

Diese Anordnung gibt kein besseres Ergebnis als die unter *E)* 2. behandelte.

Nur wenn $h_p > 0$, gibt der äußere Ausgleich eine energische Senkung des Paraboloides, dessen Scheitel dann durch Rippen auf dem Rade weiter heruntergedrückt wird.

Raum S_2.

Bei der eben durchgeführten Bestimmung von P_1 wurde so verfahren, als ob der Wasserkörper, durch dessen Gewicht der Druck auf die gesamte Unterfläche des Laufrades gegeben ist, bis zur Ebene $O\,O$ reiche, was im allgemeinen nicht der Fall ist.

a. Widerstände im Spalt σ_2.

1. Spalt σ_8 offen gegen das Saugrohr, Rippen am Saugrohre in S_2.

(Abb. 19, Tafel III)

$$\Omega = 0.$$

Angenommen wurde nach aufwärts wirkend

$$\sigma_8\, \sigma_2\, K\, P_8{}^u\, \sigma_3.$$

Tatsächlich wirkt nach aufwärts

$$\sigma_8\, \sigma_2\, K\, P_8{}^u\, \sigma_8,$$

daher

$$\boldsymbol{P_2{}^{(1)} = 0}.$$

2. Spalt σ_8 offen gegen das Saugrohr.

(Abb. 20, Tafel III).

$$\Omega = \frac{\omega}{2}.$$

Paraboloid $A_2{}^u\, P_3{}^u\, B_2{}^u\, P_8{}^u\, C_2{}^u$ kongruent Paraboloid $A_1\, B_1\, C_1$ der Abb. 13 (Tafel II).

Nach aufwärts wurde angenommen:

$$\sigma_8\, \sigma_2\, K\, P_3{}^u\, \sigma_8,$$

nach aufwärts wirkt $\sigma_3\, \sigma_2\, \boldsymbol{A_2{}^u\, P_3{}^u}\, \sigma_3$.

Somit die Differenz, nach aufwärts wirkend,

$$\boldsymbol{P_2{}^{(2)}} = -\ \textbf{Gewicht des Ringes}\ \boldsymbol{A_2{}^u\, P_3{}^u\, K\, A_2{}^u}.$$

3. Spalt σ_3 offen gegen das Saugrohr, Rippen auf dem Rade in S_2.

(Abb. 21, Tafel III).

Maßgebend ist die Saugdruckhöhe in σ_3.

$$\Omega = \omega.$$

Paraboloid $A_3{}^u\, P_3{}^u\, B_3{}^u\, P_3{}^u\, C_3{}^u$ kongruent mit Paraboloid $A_2\, B_2\, C_2$ der Abb. 14 (Tafel II).

Nach aufwärts wurde angenommen:

$$\sigma_3\, \sigma_2\, K\, P_3{}^u\, \sigma_3,$$

nach aufwärts wirkt $\sigma_3\, \sigma_2\, A_3{}^u\, P_3{}^u\, \sigma_3$.

Somit die Differenz, nach aufwärts wirkend,

$\boldsymbol{P_2^{(3)}} =$ **— Gewicht des Ringes** $\boldsymbol{A_3{}^u\, P_3{}^u\, K\, A_3{}^u}$.

Diese Anordnung gibt die größte Entlastung von S_2 aus.

b. Widerstände im Spalt σ_3.

4. Spalt σ_2 offen gegen die Turbine, Rippen auf dem Laufrade in S_2.

(Abb. 22, Tafel III).

$$\Omega = \omega.$$

Maßgebend ist die absolute Spaltdruckhöhe.

Das Paraboloid $K\, T_4\, B_4{}^u\, T_4\, L$, welches kongruent ist mit $A_2\, B_2\, C_2$ der Abb. 14 (Tafel II), muß daher vom Parallelkreise $K\,L$ abfallen.

Nach aufwärts wurde angenommen:

$$\sigma_3\, \sigma_2\, K P_3{}^u\, \sigma_3.$$

Nach aufwärts wirkt:

$$\sigma_3\, \sigma_2\, K\, T_4\, \sigma_3.$$

Somit die Differenz, nach abwärts wirkend,

$\boldsymbol{P_2^{(4)}} =$ **+ Gewicht des Ringes** $\boldsymbol{K\, P_3{}^u\, T_4\, K}$.

Diese Anordnung wäre mit Rücksicht auf den Zapfendruck die ungünstigste.

In S_2 ist bei σ_3 der Druck um $P_3\, T_4$ kleiner als in σ_3 im Saugrohr.

5. Spalt σ_2 offen gegen die Turbine.

(Abb. 23, Tafel III).

Maßgebend ist die absolute Spaltdruckhöhe.

$$\Omega = \frac{\omega}{2}.$$

Paraboloid $K\,T_5\,B_5{}^u\,T_5\,L$ kongruent dem Paraboloide $A_1\,B_1\,C_1$ der Abb. 13 (Tafel II).

Nach aufwärts wurde angenommen:

$$\sigma_3\,\sigma_2\,K\,P_3{}^u\,\sigma_3.$$

Nach aufwärts wirkt:

$$\sigma_3\,\sigma_2\,\boldsymbol{K\,T_5}\,\sigma_3.$$

Somit die Differenz, nach abwärts wirkend,

$$\boldsymbol{P_2^{(5)}} = + \textbf{Gewicht des Ringes}\ \boldsymbol{K\,P_3{}^u\,T_5\,K}.$$

Diese belastet ebenfalls den Zapfen, doch ist

$$P_2^{(5)} < P_2^{(4)}.$$

6. Spalt σ_2 offen gegen die Turbine, Rippen am Saugrohr in S_2.

(Abb. 24, Tafel III).

Maßgebend ist die absolute Spaltdruckhöhe.

$$\Omega = 0.$$

Kreisfläche in Ebene $O\,O$.

Nach aufwärts wurde angenommen:

$$\sigma_3\,\sigma_2\,K\,P_3{}^u\,\sigma_3.$$

Nach aufwärts wirkt:

$$\sigma_3\,\sigma_2\,\boldsymbol{K\,P_3{}^u}\,\sigma_3.$$

Somit die Differenz

$$\boldsymbol{P_2^{(6)}} = 0.$$

Es wären somit bei der reinen Grenzturbine die Fälle 4, 5, 6 (Abb. 22, 23, 24, Taf. III) zu vermeiden, wenn es sich um Entlastung handelt. Bei der reinen Grenzturbine wäre Fall 1 und 6 identisch (Abb. 19 und 24, Taf. III).

Je mehr sich jedoch h_p von seinem Grenzwerte

$$h_p = 0$$

entfernt, desto besser werden die Verhältnisse in den Fällen 4, 5, 6 (Abb. 22, 23, 24). Die Paraboloidgürtel $K\,T_4$, bezw. $K\,T_5$ und der Ring $K\,P_3{}^u$ (Abb. 24) rücken in den Bereich der nach links ansteigend schraffierten Flächen, und es tritt Entlastung ein, während sich an Abb. 19, 20, 21 (Taf. III) nichts ändert.

Wäre beispielsweise

$$h_p = P_3{}^u\,T_4 \text{ (Abb. 22, Taf. III)},$$

dann gäben die Anordnungen 3 und 4 (Abb. 21 und 22, Taf. III) dieselbe Entlastung. T_4 würde nach $P_3{}^u$ zu liegen kommen.

Bei der reinen Grenzturbine erhält man die größte Entlastung durch Anbringung von Rippen auf dem Rade in S_1 und S_2, die Widerstände wären in σ_2 unterzubringen, Ausgleichsöffnungen hätten zu entfallen.

Für S_1 gilt dann das Paraboloid $A_6 B_6 C_6$ (Abb. 18, Taf. II) und für S_2 das Paraboloid $A_8^u P_8^u B_8^u P_8^u C_8^u$. (Abb. 21, Taf. III).

Bei der Zusammensetzung des Druckes wird es sich empfehlen, gleichzeitig die Verhältnisse in S_1 und S_2 zu verfolgen; man kann sich dadurch bei gewissen Kombinationen die Arbeit vereinfachen.

Die **achsiale Reaktion R_z** ist wie früher zu berechnen (S. 18 und die folgenden).

Wegen $h_p = 0$

ist bei der reinen Grenzturbine der **achsiale hydraulische Gesamtdruck** $P_\Delta = 0$;

und zwar sowohl für unendlich dünne Schaufeln als auch bei Berücksichtigung der endlichen Schaufelstärke.

Es ist dies aus den Abb. 6 (Tafel I) und 6 *a* (S. 27) zu ersehen. Wird $h_p = O$, so sinkt der Punkt A_1 nach K in die Ebene $O\,O$ und es entsteht keine Fläche F_Δ.

Der **achsiale Schaufeldruck Z_q** wäre hier gleich der achsialen Reaktion.

F. Amerikanische Turbinen.

Die in der Abb. 27 (Tafel I) dargestellte Form wurde gewählt, um die Druckverhältnisse im Raume S_2 deutlich verfolgen zu können. Die Abbildung ist im Maßstabe der Abbildung 6 (Tafel I) gezeichnet. Die Turbine verarbeitet die gleiche Wassermenge wie die in Abb. 6 dargestellte normaler Bauart bei demselben Gefälle.

Es ist demnach:

$$H = 7{\cdot}0\ m,$$
$$Q = 9{\cdot}7\ m^3/\text{Sek}.$$

Mit $\left.\begin{array}{l}\sphericalangle\,\alpha = 25^0,\\ \sphericalangle\,\beta = 125^0\end{array}\right\}$ und $\eta = 0{\cdot}84$

wird

$$u_1 = \sqrt{\frac{\eta}{2} \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\beta \cdot \cos\alpha}} \cdot \sqrt{2gH} = 0{\cdot}75\sqrt{2gH} = 8{\cdot}8\ m/\text{Sek.},$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\eta}{2} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \cos\alpha}} \cdot \sqrt{2gH} = 0{\cdot}633\sqrt{2gH} = 7{\cdot}45\ m/\text{Sek.},$$

$$\frac{u_1^2}{2g} = 3{\cdot}95\ m,$$

$$\frac{U_1^2}{2g} = 0{\cdot}99\ m \quad \text{für } U_1 = \frac{u_1}{2} = 4{\cdot}4\ m/\text{Sek.},$$

$$h_p = H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g}$$

mit

$$\xi_0 = 0{\cdot}11$$

$$h_p = 0{\cdot}56 .\ H = 3{\cdot}92\ m.$$

Durchmesser D_1 und Eintrittsbreite b_1 ergeben sich mit

$$b_1 = \frac{1}{3}\ D_1$$

zu

$$D_1 = 1{\cdot}80\ m,$$

$$b_1 = 0{\cdot}60\ m.$$

Die Umlaufzahl in der Minute ist:

$$n = \frac{60\ u_1}{D_1\ \pi} = 93{\cdot}5.$$

Die Welle erhält einen Durchmesser

$$d = 200\ mm \left(d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}\ cm \right).$$

Die charakteristischen Konstruktionskoeffizienten [23]) für die Turbine wären mit der relativen Wassermenge

$$Q_1 = \frac{Q}{\sqrt{H}} = 3{\cdot}67\ m^3/\text{Sek.},$$

$$a = \frac{D_1}{\sqrt{Q_1}} = 0{\cdot}94,$$

$$b = \frac{u_1}{\sqrt{H}} = 3{\cdot}32,$$

$$c = n \cdot \sqrt{\frac{Q_1}{H}} = 67{\cdot}8;$$

sie liegen ungefähr in der Mitte zwischen den Werten für normale Bauart und für Schnelläufer. Bei der früher behandelten normalen Turbine sind die Koeffizienten mit

$$a = 1{\cdot}25, \qquad b = 2{\cdot}88, \qquad c = 43{\cdot}8,$$

den Angaben hierüber ganz entsprechend.

Die für die hydrostatische Last P_1 maßgebende Druckhöhe h_p nimmt zu mit wachsenden Winkeln α und β, das heißt mit wachsender Umfangsgeschwindigkeit. Der Grenzwert für h_p würde erreicht

$$\text{bei}\ \left.\begin{array}{l}\alpha = 40^0,\\ \beta = 150^0\end{array}\right\}^{24)}\ \text{mit}\ h_p \doteq 0{\cdot}7\ H,$$

was für $H = 7{\cdot}0\ m$ $h_p \doteq 4{\cdot}9\ m$ ergeben würde.

---

[23]) Wagenbach-Reichel, Neuere Turbinenanlagen. Springer 1905, S. 14.

[24]) Pfarr, Hütte I, 19. Aufl. 1905, S. 829.

Die Größe von P_1 wird in gleichem Maße mitbestimmt durch den Durchmesser D_1, welcher mit wachsenden Winkelwerten von α und β kleiner wird. Die beiden Faktoren von P_1 ändern sich also im entgegengesetzten Sinne.

Bezeichnen wir vorübergehend die Werte für unsere amerikanische Turbine mit

$$P_1', h_p', D_1',$$

so erhalten wir einen beiläufigen Überblick über max. P_1 bei der nicht ausgeglichenen Turbine unter Vernachlässigung des Einflusses der Fliehkraft aus

$$\left.\begin{aligned} P_1' &= \frac{\pi}{4} D_1'^2 . h_p' . \gamma, \\ P_1 &= \frac{\pi}{4} D_1^2 . h_p . \gamma, \end{aligned}\right\} \quad P_1' = \left(\frac{D_1'}{D_1}\right)^2 . \frac{h_p'}{h_p} . P_1.$$

$$D_1' = 1{\cdot}8\ m, \qquad h_p' = 3{\cdot}92\ m,$$

$$D_1 = 2{\cdot}4\ m, \qquad h_p = 3{\cdot}0\ m,$$

$$\boldsymbol{P_1' = 0{\cdot}735\ P_1 \backsim 0{\cdot}75\ P_1}.$$

Wenn auch die Fliehkraft wegen des größeren u_1 energischer wirkt, so wird trotzdem auch bei den amerikanischen Turbinen eine Entlastung anzustreben sein.

Es mögen daher die Verhältnisse in der Reihenfolge der Abschnitte *C*), S. 40, und *D*), S. 49, untersucht werden.

Raum S_1 (Abb. 27, Tafel I).

Bleiben wir zunächst innerhalb des Zylinders vom Durchmesser D_1, so erfolgt die Zusammensetzung genau so, wie im Abschnitte *B*) erläutert wurde.

Es wird wieder P_1 [*B*) 1., 2., 3] maßgebend sein. Die Verhältnisse sind in der Abb. 27 (Taf. I) dargestellt.

P_1 ist gegeben durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers, der oben von einem Paraboloide, unten von der Ebene *O O*, seitlich vom Zylinder vom Durchmesser D_1 begrenzt ist. Der Kern von Wellenstärke ist herauszunehmen.

Liegt das Paraboloid über *O O*, so ist P_1 positiv, d. h. er wirkt als hydrostatische Last auf den Zapfen; liegt es unterhalb *O O*, so wird P_1 zur hydrostatischen Entlastung. Liegt das Paraboloid zum Teile über, zum Teile unter *O O*, so ist der darüber liegende Ring positiv, die darunter liegende Kalotte negativ in Rechnung zu setzen.

Dem in *B*) 1., 2., 3. behandelten Falle entspricht auch hier:

1. Kein Ausgleich und keine Vorkehrungen.

Maßgebend ist der absolute Spaltdruck h_1.

$$\Omega = \frac{\omega}{2}.$$

Paraboloid $A_1\, B_1\, C_1$;

$$\overline{Z\,B_1} = \frac{U_1^2}{2\,g}.$$

Nach abwärts:

$$\boldsymbol{P}_1^{(1)} = + \textbf{Gewicht } \boldsymbol{A_1\, B_1\, C_1\, L\, K\, A_1} - \textbf{Kern } \boldsymbol{B_1\, B_4}.$$

2. Rippen auf dem Rade, kein Ausgleich.

Maßgebend ist der Spaltdruck h_1.

$$\Omega = \omega.$$

Paraboloid $A_2\, B_2\, C_2$; $\overline{Z\,B_2} = \frac{u_1^2}{2\,g}$. [25]

$$\boldsymbol{P}_1^{(2)} = + \textbf{Gewicht } \boldsymbol{A_2\, B_2\, C_2\, L\, K\, A_2} - \textbf{Kern } \boldsymbol{B_2\, B_4}.$$

3. Ausgleichsöffnungen im Laufradboden.

Diese wären bei der Turbine der Abb. 27 (Taf. I) unmöglich, weil die Schaufeln knapp an die Welle herantreten. Doch trachtet man auch bei den amerikanischen Turbinen, den Ausgleich zu erreichen. Dies führt auf eigentümliche, nicht sehr einfache Konstruktionen, wie z. B. die „Invincibile"-Turbine.[26] Doch ist der Ausgleich nur knapp an der Welle möglich.

Das Paraboloid würde nach $A_3\, B_3\, C_3$ sinken.

$$\Omega = \frac{\omega}{2}.$$

$A_3\, B_3\, C_3$ daher kongruent mit $A_1\, B_1\, C_1$.

Maßgebend ist die absolute Druckhöhe in A_i.

$$\boldsymbol{P}_1^{(3)} = + \textbf{Gewicht } \boldsymbol{A_3\, B_3\, C_3\, L\, K\, A_3} + \textbf{Kern } \boldsymbol{B_3\, B_4}.$$

4. Ausgleichsöffnungen im Laufradboden und Rippen auf der Innenseite des Deckels.

$\Omega = 0$, Ebene $A_4\, B_4\, C_4$ in $O\,O$.

Maßgebend ist der absolute Druck in $A_i\, A_i$.

$$\boldsymbol{P}_1^{(4)} = 0.$$

---

[25]) B_2 liegt etwas unter dem in $O\,O$ liegenden B_4. Da auch B_3 nahezu an dieselbe Stelle fällt, so wurde in Abb. 27 B_2 weggelassen.

[26]) Müller: Die Francis-Turbinen. 2. Aufl. 1905, S. 403 u. S. 321.

5. Ausgleichsöffnungen im Deckel im Durchmesser D_1.

Maßgebend ist die Saugdruckhöhe in A_a.

$$\Omega = \frac{\omega}{2}.$$

Paraboloid $A_5 B_5 C_5$ kongruent $A_1 B_1 C_1$.

$\boldsymbol{P_1^{(5)}} =$ **— Gewicht** $\boldsymbol{A_5 B_5 C_5 A_5}$ **+ Kern** $\boldsymbol{B_4 B_5}$.

6. Ausgleichsöffnungen im Deckel im Durchmesser D_1 und Rippen auf dem Rade.

Maßgebend ist die Saugdruckhöhe in A_a.

$$\Omega = \omega.$$

Paraboloid $A_6 B_6 C_6$ kongruent $A_2 B_2 C_2$.

$\boldsymbol{P_1^{(6)}} =$ **— Gewicht** $\boldsymbol{A_6 B_6 C_6 A_6}$ **+ Kern** $\boldsymbol{B_4 B_6}$.

Diese Anordnung gibt die größte Entlastung.

Raum S_2 (Abb. 27, Tafel I).

a. Widerstände im Spalt σ_2.

1. Spalt σ_3 offen gegen das Saugrohr, Rippen am Saugrohr in S_2.

Maßgebend ist die Saugdruckhöhe in σ_3.

$$\Omega = 0.$$

Nach abwärts: $1 . \sigma_3 . A_1^u . K . 1.$
Nach aufwärts: $1 . \sigma_3 . A_1^u . K . 1.$

$$\boldsymbol{P_2^{(1)}} = 0.$$

2. Spalt σ_3 offen gegen das Saugrohr.

Maßgebend ist der Saugdruck in σ_3.

$$\Omega = \frac{\omega}{2}.$$

Paraboloid $A_2^u\, T_2\, B_2^u\, T_2\, C_2^u$, und zwar ist Paraboloidring $A_2^u\, T_2$ die Fortsetzung des Paraboloides $T_2\, B_2^u\, T_2$, welches kongruent ist mit Paraboloid $A_1 B_1 C_1$.

Nach abwärts: $1 . \sigma_3 . A_2^u . T_2 . 1.$
Nach aufwärts: $1 . \sigma_3 . A_2^u . K . 1.$
Somit die Differenz, nach aufwärts wirkend:

$\boldsymbol{P_2^{(2)}} =$ **— Gewicht des Ringes** $\boldsymbol{A_2^u . K . T_2 . A_2^u}$.

3. Spalt σ_3 offen gegen das Saugrohr, Rippen am Rade in S_2.

Maßgebend ist die absolute Saugdruckhöhe in σ_3.

$$\Omega = \omega.$$

Paraboloid $A_3^u\, T_3\, B_3^u\, T_3\, C_3^u$, und zwar ist Paraboloidring $A_3^u\, T_3$ die Fortsetzung des Paraboloides $T_3\, B_3^u\, T_3$, welches kongruent ist mit dem Paraboloide $A_2\, B_2\, C_2$.

Nach abwärts: $1 \,.\, \sigma_3 \,.\, A_3^u \,.\, T_3 \,.\, 1$.
Nach aufwärts: $1 \,.\, \sigma_3 \,.\, A_3^u \,.\, K \,.\, 1$.
Somit die Differenz, nach aufwärts wirkend:

$P_2^{(3)} = -$ **Gewicht des Ringes** $A_3^u \,.\, K \,.\, T_3 \,.\, A_3^u$.

Diese Anordnung gibt die größte Entlastung von S_2 aus.

b. Widerstände im Spalt σ_3.

4. Spalt σ_2 offen gegen die Turbine, Rippen am Laufrade in S_2.

Maßgebend ist die absolute Druckhöhe in σ_2.

$$\Omega = \omega.$$

Paraboloid $A_4^u\, A_2\, B_2\, C_2\, C_4^u$, und zwar ist Paraboloidring $A_4^u\, A_2$ die Fortsetzung des Paraboloides $A_2\, B_2\, C_2$, welches zur Anordnung der Rippen auf dem Laufrade in S_1 ohne Ausgleich gehört.

Nach abwärts: $1 \,.\, \sigma_3 \,.\, A_4^u \,.\, A_2 \,.\, 1$.
Nach aufwärts: $1 \,.\, \sigma_3 \,.\, A_1^u \,.\, K \,.\, 1$.
Somit die Differenz, nach abwärts wirkend:

$P_2^{(4)} = +$ **Gewicht des Rotationskörpers** $A_4^u \,.\, A_2 \,.\, K \,.\, A_1^u \,.\, A_4^u$.

Durch diese Anordnung erwächst dem Zapfendrucke von S_2 aus die größte Belastung.

5. Spalt σ_2 offen gegen die Turbine.

Maßgebend ist die absolute Druckhöhe in σ_2.

$$\Omega = \frac{\omega}{2}.$$

Paraboloid $A_5^u\, A_1\, B_1\, C_1\, C_5^u$, und zwar ist Paraboloidring $A_5^u A_1$ die Fortsetzung des Paraboloides $A_1\, B_1\, C_1$, welches zur nicht ausgeglichenen Turbine gehört.

Nach abwärts: $1 \,.\, \sigma_3 \,.\, A_5^u \,.\, A_1 \,.\, 1$.
Nach aufwärts: $1 \,.\, \sigma_3 \,.\, A_1^u \,.\, K \,.\, 1$.
Somit die Differenz, nach abwärts wirkend:

$P_2^{(5)} = +$ **Gewicht des Rotationskörpers** $A_5^u \,.\, A_1 \,.\, K \,.\, A_1^u \,.\, A_5^u$.

Diese Anordnung gibt noch immer eine beträchtliche Belastung von S_2 aus.

6. Spalt σ_2 offen gegen die Turbine, Rippen am Saugrohr in S_2.

Maßgebend ist die absolute Druckhöhe in σ_2.

$$\Omega = 0.$$

Ebene $A_6^u Z C_6^u$.

Davon kommt die Ringfläche von der Breite $A_6^u A_1$ zur Geltung.

Nach abwärts: $1 \,.\, \sigma_3 \,.\, A_6^u \,.\, A_1 \,.\, 1.$

Nach aufwärts: $1 \,.\, \sigma_3 \,.\, A_1^u \,.\, K \,.\, 1.$

Somit die Differenz, nach abwärts wirkend:

$P_2^{(6)} = +$ **Gewicht des Ringzylinders** $A_6^u \,.\, A_1 \,.\, K \,.\, A_1^u \,.\, A_6^u$

Auch diese Anordnung gibt eine Belastung des Zapfens von S_2 aus.

Mit Rücksicht auf den Zapfendruck sind die Anordnungen 4.5.6 auszuscheiden.

Die Ausflußdruckhöhe für den Spaltverlust ist am größten und gleich in den Fällen 3 und 4; gegeben durch $A_1 T_3$ im Falle 3 durch σ_2, durch $A_4^u A_1^u$ im Falle 4 durch σ_3.

Im Falle 3 wäre der Spaltverlust trotzdem kleiner, weil hier $D_1 < D_3$.

Während bei den Francis-Turbinen, bei welchen $D_1 > D_3$ ist, die Fälle von 1. bis 6. steigende Entlastungen geben, und zwar 3. bis 6. die größten, geben diese drei letzteren die größten Belastungen und 1. bis 3. Entlastungen bei den Turbinen, bei welchen $D_3 > D_1$ ist (amerikanische Turbinen).

Während man bei der ersteren Bauart mit Vorteil den Spaltdruck in den Raum S_2 hineinleitet, ist er bei der letzteren von diesem Raume fernzuhalten.

Bei Turbinen der Bauart Abb. 27 (Taf. I) erreicht man die größte hydrostatische Gesamtentlastung durch Anbringung von Rippen auf dem Laufrade in S_1 und S_2, durch äußeren Ausgleich, mit den Widerständen in σ_2.

Die **achsiale Reaktion** R_z ist wie früher zu ermitteln.

G. Rechnungsvorgang.

Ist das maßstabrichtige Bild der Anordnung aufgezeichnet, so kann die Berechnung des Druckes auf den Spurzapfen, wie folgt, vorgenommen werden:

1. Nach den Abschnitten *B*) 1. 2. 3. und Abb. 6 (Tafel I), bezw. nach *C*) 1. bis 6. und Abb. 13 bis 18 (Tafel II) oder nach *E*) und *F*) mit Abb. 27 (Tafel I) wird die Größe $\boldsymbol{P}_1$ ermittelt, welche wesentlich bestimmt ist durch die Druckverhältnisse im Raume S_1.

Bei der Ermittlung dieser Größe wird zunächst angenommen, daß auf die ganze Unterfläche des Laufrades, auch in S_2, der Saugdruck wirkt, so daß der den Druck P_2 liefernde Wasserkörper oben durch *0 0* begrenzt ist. Es baut sich daher P_1 immer über dem Kreise vom Durchmesser D_1 in *0 0* auf; liegt an dieser darüber oder darunter (Abb. 13 bis 18, Taf. II, und 27, Taf. I).

2. Hierauf werden die tatsächlichen Verhältnisse im Raume S_2 berücksichtigt und danach die Größe von $\boldsymbol{P}_2$ berechnet nach den Abschnitten *D*) 1. bis 6. und Abb. 19 bis 24 (Tafel III), bezw. nach *E*) und *F*) mit Abb. 27 (Tafel I).

Wird P_2 positiv, wirkt es also belastend, dann soll es nicht vernachlässigt werden. Wird es negativ, also entlastend, dann kann es nach Ermessen und Überlegung entweder berücksichtigt oder als Reserve behandelt werden.

Mit P_1 und P_2 ist der hydrostatische Teil des Spurdruckes erledigt, wobei hervorzuheben ist, daß das Gewicht des Wassers im Rade als solches aus der Rechnung fällt. Dies gilt bei allen Turbinen, welche im Saugrohr oder im *U. W.* angeordnet sind. Nur bei den in freier Luft aufgestellten bleibt es belastend in der Rechnung.

3. Die achsiale Reaktion $\boldsymbol{R}_z$ folgt nach dem Abschnitte *B*) 4. mit Abb. 9 (S. 23).

Mit R_z ist der hydrodynamische Teil des Spurdruckes erledigt.

4. Das Gewicht des Laufrades $\boldsymbol{G}_r'$ (Gewicht G_r weniger Auftrieb) und der Anteil der Welle am Zapfendrucke $\boldsymbol{P}_w$ sind nach *B*) 6. u. 7. zu ermitteln.

Ferner sind die außerhalb des Wassers liegenden auf der Spur abgestützten Konstruktionsteile, als Zapfenkörper, Zahnrad oder Rotor, mit ihren vollen Gewichten belastend in Rechnung zu setzen. (*B*, 8. u. 9.) Ihre Summe sei $\boldsymbol{G}_k$.

Wiederholend ist zu bemerken, daß P_w größer als das volle Gewicht der Welle ist.

5. Im Falle der Arbeitsübertragung mit Kegelrädern ist die achsiale Komponente des Zahndruckes P_z nach B) 10. zu ermitteln. Sie wird umso größer, je größer die Umlaufzahl der Übertragungswelle sein soll. Diese Komponente P_z wirkt entlastend, wenn das treibende Rad oberhalb der Übertragungswelle liegt, sie wirkt belastend, wenn es unterhalb angeordnet wird.

Sind die einzelnen Teile festgelegt, dann folgt der Druck auf den Spurzapfen aus der Gleichung:

$$P = P_1 + P_2 + R_z + G_r' + P_w + G_k + P_z \; kg.$$

P_1, P_2, P_z können je nach Anordnung positiv oder negativ, belastend oder entlastend sein.

R_z ist bei nach abwärts gekehrter Austrittsfläche jedenfalls negativ, also entlastend.

G_r', P_w, G_k sind jedenfalls positiv, d. h. belastend.

Es ist nun nicht schwer, für irgend eine Disposition die für die Entlastung günstigste Anordnung zu finden. Gießt z. B. ein Laufrad nach oben aus[27]), dann erhält man die größte Zapfenentlastung, wenn man keinerlei Ausgleich mit dem Saugraume herbeiführt, vielmehr den Spaltdruck in den Deckelraum hineinleitet und außerdem noch Rippen auf die Innenseite des Deckels setzt. Es wäre dann (Abb. 6, Taf. I).

$$P_1 = - \text{ Gewicht des Zylinders } A_1 C_1 L K A_1 + \text{ Kern } Z B_1.$$

Bei der nach unten ausgießenden Turbine wäre diese Anordnung die allerungünstigste. Bei dieser Turbine führt bekanntlich der äußere Ausgleich und die Anbringung von Rippen auf dem Laufrade in S_1 zur größten Entlastung. Diese Anordnung wäre wieder die schlechteste für die mit der Austrittsfläche nach oben gekehrten Turbine.

Bei den Zentrifugalpumpen ist das bisher erläuterte Verfahren der Zusammensetzung des Druckes auf den Spurzapfen ohneweiters anwendbar.

Es ist bei der graphischen Ermittlung keineswegs erforderlich, daß die ganze Anordnung der Turbine aufgezeichnet werde.

Ein Blick auf die Abb. 13 bis 18 (Taf. II) lehrt, daß für die Zeichnung ein Raum erforderlich ist, der nicht höher als $h_p + \frac{u_1^2}{2g}$, nicht breiter als D_1, bezw. D_3 (amerikanische Turbinen) werden kann.

Es wäre noch zu bemerken, daß man den größten Druck im Raume S_1 erhält, wenn man die Verbindung mit der Druckleitung oder mit einem

---

[27]) Z. B. das mittlere Rad der Etagenturbinen in Beznau „Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure" 1901, S. 1564.

Hochbehälter möglichst nahe an der Achse anschließt und Rippen auf dem Laufrade anordnet.[28])

Nach dem Rechnungsvorgange ergäbe sich für unsere Turbine folgende Zusammenstellung:

a.		*b.*	*c.*	*d.*			
P_1 *kg*	P_2 *kg*	R_z *kg*	$G_r' + P_w + G_k$ *kg*	P_z *kg*		P *kg*	
				Rad oben	Rad unten	Rad oben	Rad unten
$P_1^{(1)} = +11.812$	$P_2^{(6)} =$ — 1323 *kg*	—2090	$G_r' = +2700$	—1214	+ 1214	+20.136	+22.564
$P_1^{(2)} = +\ 6.874$			$P_w = +2337$ $+\ 114$ $= +2451$			+15.198	+17.626
$P_1^{(3)} = +\ 1.317$						+ 9.641	+12.069
$P_1^{(4)} =$ Null			$G_k = +7500$ $+\ 300$ $= +7800$			+ 8.324	+10.752
$P_1^{(5)} = -\ 1.646$						+ 6.678	+ 9.106
$P_1^{(6)} = -\ 6.584$			$G_r' + P_w + G_k = +12.951$			+ 1.740	+ 4.168

Durch den Einbau von Absperrvorrichtungen in die Umführungsleitungen zum Saugrohr oder zum Unterwasser kann der Druck auf den Spurzapfen geregelt werden, da vom Spalt σ_1 durch die Umführungsleitungen eine Strömung vorhanden ist. Je mehr die Absperrvorrichtungen (Hähne) geschlossen werden, desto größer wird der Druck in S_1 im Durchmesser D_1, desto höher rückt das Paraboloid aus seiner untersten Grenzlage $A_6 B_6 C_6$ nach seiner obersten, $A_2 B_2 C_2$, welche bei ganz geschlossenen Absperrvorrichtungen erreicht wird.

Wäre beispielsweise $G'_r + P_w + G_k = +\ 8851$ *kg*, so erhielte man für den Fall „Zahnrad oben" als untersten Grenzwert $P = -\ 2360$ *kg*.

Um für den Spurdruck den Wert Null zu erzielen, hätte man die Absperrvorrichtungen so weit zu schließen, daß das Paraboloid $A_6 B_6 C_6$ in eine Lage $A_7 B_7 C_7$ (Abb. 28, auf S. 71 im Maßstabe der Tafel II gezeichnet) kommt, welcher ein Wert $P_1^{(7)}$ entspricht, der mit den übrigen Teilen des Spurdruckes die Summe Null ergibt.

Es folgt daher aus

$$P = P_1^{(7)} - 1323 - 2090 + 8.851 - 1214 = 0,$$

$$\mathbf{P_1^{(7)} = -\ 4224\ \mathit{kg}.}$$

Die dazugehörige Lage des Paraboloides $A_7 B_7 C_7$ kann auf folgende Art ermittelt werden:

Nimmt man wie früher die Zusammensetzung von P_1, aber zunächst nur bis zur Ebene BB (Abb. 28), vor, so

---

[28]) Vergleiche hiezu Abb. 4, Paraboloid $A_2' B_2 C_2'$. (S. 7.)

bleiben noch von dem nach aufwärts wirkenden Drucke negativ das Gewicht des Zylinders $A_6 C_6 B B A_6$ und positiv der Kern von Wellenstärke $B_4 B_7$, zusammen

$$\gamma \cdot \left(- \frac{\pi}{4} D_1^2 \cdot x + f \cdot x\right) kg$$

übrig, wenn mit x die Tiefe des gesuchten Paraboloidscheitels B_7 unter der Ebene $O\,O$ bezeichnet wird.

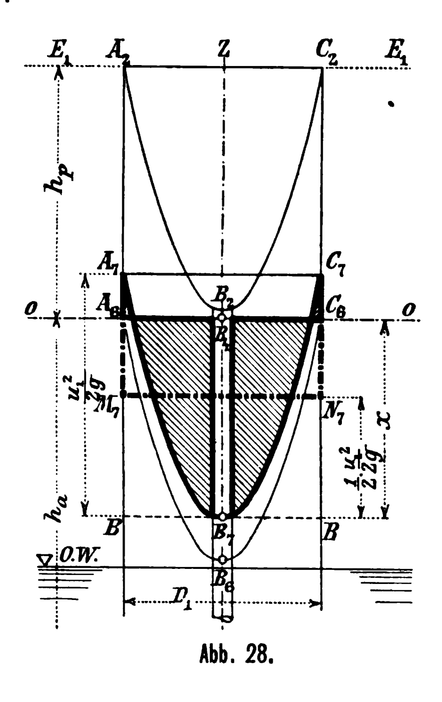


Abb. 28.

Ferner bleibt von dem nach abwärts wirkenden Drucke das Gewicht des Wasservolumens zwischen dem Paraboloide $A_7 B_7 C_7$ und dem Zylindermantel, welches inhaltsgleich ist dem Volumen des Paraboloides $A_7 B_7 C_7$ mit der Höhe $\frac{u_1^2}{2g}$ oder dem des Zylinders $M_7 N_7 B B M_7$ mit der Höhe $\frac{1}{2} \cdot \frac{u_1^2}{2g}$, für dessen Gewicht geschrieben werden kann:

$$+ \gamma \cdot \frac{\pi}{4} D_1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{u_1^2}{2g} \, kg.$$

Es ist somit:

$$P_1^{(7)} = \gamma \cdot \left[\left(- \frac{\pi}{4} D_1^2 + f\right) \cdot x + \frac{\pi}{4} D_1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{u_1^2}{2g}\right] kg,$$

woraus sich ergibt:

$$x = \frac{\frac{1}{\gamma} \cdot P_1^{(7)} - \frac{\pi}{4} D_1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{u_1^2}{2g}}{-\frac{\pi}{4} D_1^2 + f} \; m.$$

Für unsere Turbine folgt mit

$P_1^{(7)} = -4224\, kg$, $D_1 = 2{\cdot}4\, m$, $u_1 = 7{\cdot}6\, m/\text{Sek.}$ und

$$f = 0{\cdot}038\, m^2$$

$$x = 2{\cdot}43\, m.$$

In Abb. 28 (S. 71) entspricht dem $P_1^{(7)}$ die Summe aus dem negativ zu nehmenden Gewichte des Zylinders

$$A_6\, C_6\, N_7\, M_7\, A_6$$

mit der Höhe

$$\overline{A_6 M_7} = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{u_1^2}{2g} = 0{\cdot}95\, m$$

und aus dem positiv zu nehmenden Kerne $B_4 B_7$ von Wellenstärke; es kann also auch für $P_1^{(7)}$ geschrieben werden:

$$P_1^{(7)} = -\gamma \cdot \left(\frac{\pi}{4} D_1^2 \cdot \overline{A_6 M_7} - f \cdot \overline{B_4 B_7} \right) kg.$$

Dieser Wert ist gleich jenem, welcher sich aus dem positiven, rechts ansteigend schraffierten, über $O\,O$ liegenden Teile und aus dem negativen, links ansteigend schraffierten, unter $O\,O$ liegenden Teile des Paraboloides $A_7 B_7 C_7$ ergeben würde.

Es läßt sich jetzt auch der Spurdruck für die in Abb. 29 dargestellte Anordnung berechnen, welche schon auf S. 34 berührt wurde:

$$P = Z_q + G_r' + P_w + G_k + P_z \; kg.$$

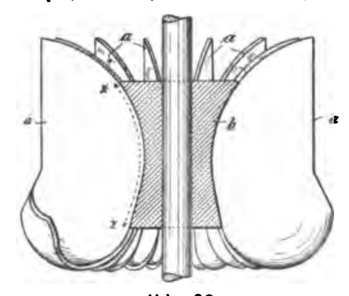


Abb. 29.

Nehmen wir wieder vergleichsweise unsere Turbine, so wird für „Zahnrad oben“:

$$P = +3410 + 12.951 - 1214 = +15.147\; kg$$

und für „Zahnrad unten“:

$$P = +17.575\; kg.$$

H. Druck auf den Deckel.

(Abb. 30, S. 74.)

Die Darstellung der Drücke durch die Gewichte von Wasserkörpern gibt auch in übersichtlicher Weise den Druck auf den Deckel. Je nach den Anordnungen im Raume S_1 ist dieser Druck verschieden groß. Er ist am größten bei der am meisten entlasteten Turbine (C. 6), am kleinsten bei der nicht ausgeglichenen Turbine ohne irgendwelche Vorkehrungen (C. 1).

Auch hier arbeitet man mit Vorteil mit den absoluten Druckhöhen.

Trägt man über dem $O.W.$-Spiegel die Druckhöhe der Atmosphäre $h_a = 10 m$ auf, so erhält man die Ebene $O' O'$. Vorausgesetzt ist wieder unsere normale Turbine.

Der absolute Druck auf den Deckel nach abwärts ist dann gegeben durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers, der oben begrenzt wird durch die Kreisfläche $O' O'$ vom Durchmesser D_1, unten aufsteht auf der oberen Begrenzungsfläche des Deckels 7, 8, 9, 10 und seitlich ummantelt wird vom Zylinder mit dem Durchmesser D_1. Der Kern von Wellenstärke hat herauszufallen.

Der absolute Druck, den der Deckel nach aufwärts erfährt, ist gegeben durch das Gewicht eines Wasserrotationskörpers, der sich aufbaut über derselben Deckelbegrenzung 7, 8, 9, 10 (der Deckel ist aus Wasser gedacht, wodurch sich sein Auftrieb erledigt) und hinaufreicht bis zu einem der Paraboloide, und zwar

1. bis zum Paraboloide $A_1 B_1 C_1$ im Falle (C 1),
2. „ „ „ $A_2 B_2 C_2$ „ „ (C 2),
3. „ „ „ $A_3 B_3 C_3$ „ „ (C 3),
4. „ zur Ebene $A_4 B_4 C_4$ „ „ (C 4),
5. „ zum Paraboloide $A_5 B_5 C_5$ „ „ (C 5),
6. „ „ „ $A_6 B_6 C_6$ „ „ (C 6).

Die Differenz dieser beiden Drücke ist vom Deckel aufzunehmen und durch das Leitrad auf den Tragring überzuführen.

Diese Differenz gibt einen Wasserrotationskörper, der oben begrenzt wird von der Kreisfläche $O' O'$ vom Durchmesser D_1, hinabreicht bis zu einem der Paraboloide und seitlich umhüllt wird vom Zylinder mit dem Durchmesser D_1. Der Kern von Wellenstärke und einer Länge, die von Z' bis zum Paraboloidscheitel reicht, ist herauszunehmen.

Nehmen wir z. B. den Fall der größten Belastung des Deckels (C. 6), so wäre:

Nach abwärts wirkend:

$$O' O' . 10 . 9 . 8 . 7 . O' - \text{Kern } \overline{Z' . 8}.$$

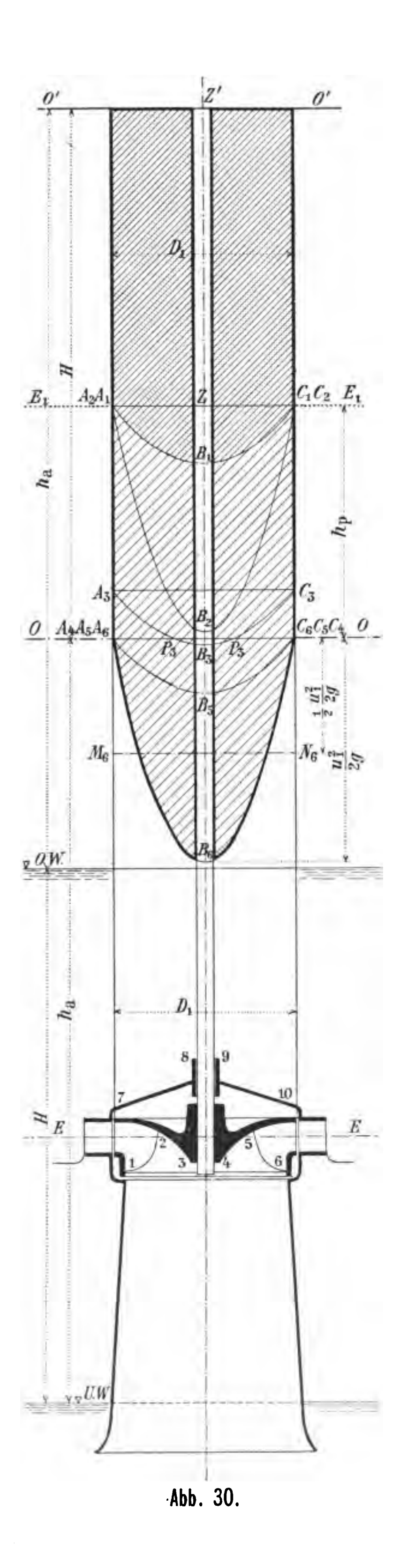

O'
Z'
O'
D1
H
E1
A2A1
Z
C1C2
E1
B1
ha
hp
A3
C3
O
A4A5A6
B2
C6C5C4
O
P3
B3
P3
B5
M6
N6
O.W.
B6
ha
D1
8
9
7
10
H
E
E
2
5
1
3
4
6
U.W.

Abb. 30.

Nach aufwärts wirkend:

$$A_6 B_6 C_6 \, 10 . 9 . 8 . 7 . - \text{Kern } \overline{8 . B_6}.$$

Daher die Differenz:

$$\boldsymbol{P_d^{(6)} = + \textbf{Gewicht } O' O' C_6 B_6 A_6 O' - \textbf{Kern } \overline{Z' B_6}},$$

oder durch die entsprechenden Größen ausgedrückt,

$$\boldsymbol{P_d^{(6)} = + \frac{\pi}{4} D_1^2 \left(H + \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{2g}\right) \gamma - f \left(H + \frac{u_1^2}{2g}\right) \gamma \; kg.}$$

H das Motorgefälle in m.

u_1 die Umfangsgeschwindigkeit der Turbine in D_1 in m/Sek.

D_1 in m.

f der Wellenquerschnitt in m^2.

$\gamma = 1000 \; kg/m^3$.

Hiebei ist das Paraboloid $A_6 \, B_6 \, C_6$ mit der Scheitelhöhe

$$\frac{u_1^2}{2g} = \overline{B_4 B_6}$$

in den inhaltsgleichen Zylinder $A_6 \, C_6 \, N_6 \, M_6 \, A_6$ mit der Höhe

$$\overline{A_6 M_6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_1^2}{2g} = \frac{1}{2} \overline{B_4 B_6}$$

verwandelt (Abb. 30).

Für unsere Turbine wäre ($C.6$)

$$P_d^{(6)} = 4{\cdot}524 \, (7 + 1{\cdot}48) . 1000 - 0{\cdot}038 \, (7 + 2{\cdot}96) . 1000 =$$
$$= 38.364 - 379,$$

$$\boldsymbol{P_d^{(6)} = 37.985 \; kg \sim 38 \; \textbf{Tonnen.}}$$

Für die übrigen Fälle wäre die zuletzt entwickelte Gleichung folgendermaßen umzuformen:

($C.5$): Statt u_1 ist zu setzen U_1, und zwar

$$U_1 = \frac{1}{2} . u_1.$$

Damit ergibt sich dann $P_d^{(5)}$.

($C.4$): Hier ist $u_1 = 0$ zu setzen:

$$P_d^{(4)} = + \frac{\pi}{4} D_1^2 . H . \gamma - f . H . \gamma.$$

Es hängt am Deckel die Saugsäule, welche vom Deckel bis $U.W.$ reicht, und es lastet auf dem Deckel die Drucksäule zwischen Deckel und $O.W.$

($C.3$): Es kann hier wie im Abschnitte ($C.3$), S. 42, verfahren werden. Schneller kommt man mit Hilfe der Zeichnung zu

$$P_d^{(3)} = + \frac{\pi}{4} D_1^2 \left(\overline{O' A_3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1^2}{2g}\right) \gamma - f . \overline{Z' B_3} . \gamma.$$

$$(C.2):\ P_d^{(2)} = +\frac{\pi}{4} D_1^2 \left(H - h_p + \frac{1}{2}\cdot\frac{u_1^2}{2g}\right)\gamma - \\ - f\left(H - h_p + \frac{u_1^2}{2g}\right)\gamma.$$

$$(C.1):\ P_d^{(1)} = +\frac{\pi}{4} D_1^2 \left(H - h_p + \frac{1}{2}\,\frac{U_1^2}{2g}\right)\gamma - \\ - f\left(H - h_p + \frac{U_1^2}{2g}\right)\gamma.$$

Bei praktischen Rechnungen braucht man sich auch hier nicht der Formel zu bedienen; man kann mit Hilfe der Zeichnung verfahren, ähnlich wie in (C. 3) erläutert wurde.

Beispielsweise erhielte man $P_d^{(6)}$, wie folgt:

Man halbiere $\overline{B_4\,B_6}$, die Scheitelhöhe des Paraboloides $A_6\,B_6\,C_6$, und ziehe $M_6\,N_6$. dann erhält man

$$P_d^{(6)} = +\frac{\pi}{4} D_1^2 \,.\, \overline{O'M_6}\,.\,\gamma - f\,.\,\overline{Z'B_6}\,.\,\gamma\ kg;$$

worin $\overline{O'M_6}$ und $\overline{Z'B_6}$ am Maßstabe der Zeichnung in m abzumessen sind, D_1 in m, f in m^2 und $\gamma = 1000\ kg/m^3$ eingesetzt werden, um $P_d^{(6)}$ in kg zu erhalten.

II.

Francis-Turbinen mit wagrechter Welle.

A. Druckverhältnisse in einer um eine horizontale Achse rotierenden Wassermasse.

Ein horizontaler Kreiszylinder, voll mit Wasser gefüllt, rotiere mit unveränderlicher Winkelgeschwindigkeit ω um seine geometrische Achse $Z\,Z$ als Rotationsachse (Abb. 31 und 32, Tafel IV).

Die Niveauflächen sind in diesem Falle konzentrische Kreiszylinder, deren Achse $Z_n\,Z_n$ parallel ist zur Zylinderachse und in einer Entfernung

$$\frac{g}{\omega^2}$$

vertikal über dieser liegt.[29])

Die Achse Z liege in einer Tiefe von H_1 m unter dem Wasserspiegel, über welchem die Atmosphäre lastet. Es ist dann die absolute Druckhöhe in der Achsentiefe

$$h_1 = H_1 + h_a.$$

Zur Messung der absoluten Druckhöhen rücken wir wieder den Wasserspiegel um $h_a = 10\,m$ höher und denken uns über diesem ideellen Spiegel $W\,W$ Luftleere.

Um die Druckverteilung in dem rotierenden Zylinder zu bestimmen, gehen wir aus von der Gleichung:

$$d\,p = \frac{\gamma}{g}(X\,.\,d\,x + Y\,.\,d\,y + Z\,.\,d\,z),^{30)}$$

in welcher mit X, Y, Z die Komponenten der auf die Masseneinheit wirkenden Massenkraft bezeichnet sind.

---

[29]) Grashof: „Theoretische Maschinenlehre" I., 1875, S. 297. Rühlmann: „Hydromechanik" 1880, S. 18.

[30]) Grashof: „Theoretische Maschinenlehre" I., S. 285, 286, 287.

Gehen wir von einem beliebigen Punkte A_N, z. B. der Niveaufläche $N_3 N_3$ (Abb. 31, Taf. IV) längs der Normalen dn in A_N über zur Niveaufläche des Druckes $p + dp$, wobei dp positiv vorausgesetzt werden soll, und lassen wir die x-Achse mit der Richtung von dn zusammenfallen, so ist, wenn mit P die resultierende Kraft für den Punkt A_N bezeichnet wird, in der obigen Gleichung:

$$dx = dn,$$
$$X = + P,$$
$$y = 0,$$
$$Z = 0,$$

daher

$$dp = \frac{\gamma}{g} \cdot P \cdot dn.$$

Wenden wir nun diese Gleichung auf unseren Fall an, so ist für diesen P die Resultierende aus der Fliehkraft und der Schwerkraft, daher auf die Masseneinheit in A_N bezogen

$$P = \rho\, \omega^2 + g,$$

wenn mit ρ die Entfernung der tiefsten Erzeugenden der Niveaufläche N_3 von der Zylinderachse ZZ bezeichnet wird.

Ist r der Halbmesser der Niveaufläche N_3, so wird

$$\rho = r - \frac{g}{\omega^2}$$

und

$$P = \left(r - \frac{g}{\omega^2}\right) \cdot \omega^2 + g,$$

$$P = r\, \omega^2.$$

Ferner ist

$$dn = dr,$$

und es wird

$$dp = \frac{\gamma}{g} \cdot r\, \omega^2 \cdot dr,$$

$$p = \gamma \cdot \frac{r^2\, \omega^2}{2g} + C'$$

oder die Druckhöhe

$$\frac{p}{\gamma} = h,$$

$$h = \frac{r^2\, \omega^2}{2g} + C,$$

d. i. die Gleichung einer Parabel $A_1' B_1' C_1'$ (Abb. 32, Taf. IV), deren Scheitel in der Achse $Z_n Z_n$ liegt. Für jede andere durch Z_n gelegte Ebene hätte sich nach der Eigenschaft der Niveauflächen dieselbe Parabel ergeben[31]), und es ist daher diese Parabel der Meridian eines Rotationsparaboloides, durch welches die Druckverteilung im Zylinder ZZ bestimmt wird.

Die Konstante C ist die Scheitelhöhe des Paraboloides über der der Druckhöhenmessung zugrunde gelegten Nullebene; denn es ist für

$$r = 0$$

$$h = h_{B_1'} = C.$$

Diese Scheitelhöhe des Paraboloides ist bestimmt durch die äußeren Druckverhältnisse, unter welchen der Zylinder steht. Die folgenden Untersuchungen werden die Lage des Scheitels ergeben.

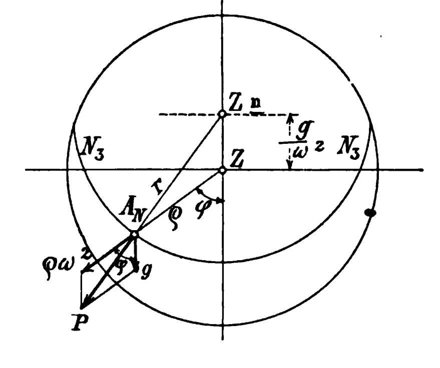
Betrachtet man die Gleichung näher unter Heranziehung der Druckverhältnisse in einer um eine vertikale Achse rotierenden Wassermasse (S. 1), so sieht man, daß die Verhältnisse gerade so liegen, als ob bei vertikaler Achse das Wasser nicht um ZZ, sondern um die Achse $Z_n Z_n$ rotieren würde. Von dem auf diese Weise entstehenden Rotationsparaboloide kommt nur der Teil in Betracht, welcher innerhalb des Zylinders mit der Achse ZZ liegt.

$\frac{r^2 \omega^2}{2g}$ ist die Höhe des Parallelkreises vom Durchmesser $2r$ über der Scheitelebene.

Die in Abb. 31 (Taf. IV) gezeichneten Kreise N_1 bis N_5 sind nichts anderes als die Projektionen von Parallelkreisen des Paraboloides $A_1' B_1' C_1'$, welche als Schnittlinien der Niveauzylinderflächen mit diesem koachsialen Paraboloide entstehen.

Die Kreise N_1 bis N_5 entsprechen übrigens Niveauzylindern gleicher Druckzunahme; es nimmt daher ihre radiale Ferne nach außen ab.

Was nun die Schnittlinie des Zylinders Z mit dem Paraboloide mit der Achse Z_n anbelangt, so ist diese wegen der parallelen Lage der Achsen eine Ellipse, welche in einer zur $Z Z_n$-Ebene senkrechten Ebene liegt. Die Ellipse projiziert sich daher auf die $Z Z_n$-Ebene als Gerade, und es ist deshalb, wegen der Lage der beiden Achsen Z und Z_n in der Zeichenebene, die Gerade $A_1' C_1'$ die Projektion der Schnittellipse zwischen dem Zylinder Z und dem Paraboloide Z_n. Gleichzeitig ist die Gerade $A_1' C_1'$ die Aufrißspur der Ellipsenebene.



81) $P^2 = \rho^2 \omega^4 + g^2 + 2 g \rho \omega^2 . \cos \varphi,$

$r^2 = \rho^2 + \frac{g^2}{\omega^4} + 2 \rho . \frac{g}{\omega^2} . \cos \varphi,$

$P = r \omega^2.$

Zum Neigungswinkel dieser Ebene gegen die Grundrißebene gelangt man durch folgende Überlegung:

Nimmt man irgend einen Punkt G_1 in der Parabel $A_1' B_1' C_1'$ an, welcher um y unter der Z-Achse liegt, und denkt man sich das Wassersäulchen $G_1 G_1'$ von der Höhe $2y$ symmetrisch zur Z-Achse, so heben sich die Fliehkräfte in demselben auf, und es bleibt daher nur die Wirkung der Schwerkraft übrig, welcher eine Zunahme an Druckhöhe um $2y$ von G_1' bis G_1 entspricht. Da sowohl in G_1 als auch in der Höhe von G_1' die Druckhöhen durch die Parabelordinaten parallel zu ZZ gemessen werden, so muß

$$h_{G_1} - h_{G_2} = 2y$$

sein, das heißt, die Gerade $G_2 G_1$ muß unter 45^0 gegen die Z-Achse geneigt sein, wenn der Maßstab der Druckhöhen gleich genommen wird dem Längenmaßstabe der Abbildung, was wie bei allen früheren Untersuchungen als Grundlage der graphischen Ausmittlung auch tatsächlich geschehen ist.

Wenden wir diese Betrachtung auf den tiefsten Punkt C_1' der Parabel an, so muß folgerichtig der höchste Punkt A_1' in der horizontalen Entfernung $2R$ von ersterem liegen. Die große Achse der Ellipse $A_1' C_1'$ ist somit unter 45^0 gegen die Horizontale geneigt und mit ihr nach früherem die Ellipsenebene. An den Druckhöhen in der höchsten und tiefsten Zylindererzeugenden wird daher durch die Rotation an den rein statischen Druckhöhen ohne Rotation nichts geändert. Die gleiche Betrachtung gilt übrigens für jeden zur Zeichenebene parallelen Schnitt, das heißt für jeden Punkt der Schnittellipse.

Daß die Druckhöhen in A_1' und C_1' um $2R$ verschieden sind, ergibt auch die Rechnung:

Es ist allgemein

$$h = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + C.$$

Für

$$C_1' \text{ ist } r = \frac{g}{\omega^2} + R$$

und

$$h_{C_1'} = \frac{\omega^2}{2g} \cdot \left[\left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 + 2R \cdot \frac{g}{\omega^2} + R^2\right] + C,$$

für

$$A_1' \text{ ist } r = \frac{g}{\omega^2} - R$$

und

$$h_{A_1'} = \frac{\omega^2}{2g}\left[\left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 - 2R \cdot \frac{g}{\omega^2} + R^2\right] + C;$$

somit

$$h_{C_1'} - h_{A_1'} = \frac{\omega^2}{2g} \cdot 4R\frac{g}{\omega^2} = 2R.$$

Im Schnittpunkte B_1 der Parabel $A_1' B_1' C_1'$ mit der Zylinderachse ZZ ist $y = 0$; es wird daher die Sehne $(G_2 G_1)$ zur Tangente, und es ist somit in diesem Punkte die Tangente, unter 45^0 gegen die Horizontale geneigt.

Die Höhe des Punktes B_1, bezw. seines Parallelkreises über der Scheitelebene des Paraboloides ist mit

$$r = \frac{g}{\omega^2}$$

$$h_{B_1} = \frac{r^2 \omega^2}{2g} = \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 \cdot \frac{\omega^2}{2g},$$

$$h_{B_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{\omega^2},$$

das heißt, gleich der halben Entfernung der beiden Achsen ZZ und $Z_n Z_n$. Die statische Druckzunahme wäre doppelt so groß.

Es handelt sich nunmehr darum, die Lage des Paraboloides, welches die Druckverteilung und den Gesamtdruck auf den Zylinderboden bestimmt, mit Rücksicht auf die äußeren Druckverhältnisse festzustellen.

Ringspalt DGE.

Nehmen wir zunächst an, der Zylinder stehe durch den Ringspalt DGE (Abb. 32, Taf. IV) mit dem äußeren Raume in Verbindung, in welchem in der Tiefe ZZ die absolute Druckhöhe durch h_1 gemessen wird. Rotiert der Zylinder nicht, so ist die Druckverteilung gegeben durch die Ebene $A_1' Z_1 C_1'$, welche unter 45^0 gegen die Grundrißebene geneigt ist, und deren Lage bestimmt ist durch

$$\overline{JZ_1} = h_1.$$

Es ist dann

$$\overline{DA_1'} = h_1 - R,$$

$$\overline{EC_1'} = h_1 + R.$$

Wird nun die Rotation eingeleitet, welche bei ω ihren Beharrungszustand erreicht, so erfolgt die **Druckverteilung** nach einem Paraboloide $A_1' B_1' C_1'$, von welchem der eben bezeichnete Abschnitt zur Geltung kommt; dieser baut sich, wie zuvor festgestellt wurde, über einer zur Ellipse $A_1' Z_1 C_1'$ kongruenten auf, und der Zustand des Gleichgewichtes fordert es, daß die beiden Ellipsen zusammenfallen, denn die äußeren Druckhöhen im Ringspalt DGE sind durch die schief geschnittene Zylinderfläche $DA_1' C_1' ED$ gegeben. Das Paraboloid stellt sich somit über der der rein statischen Druckverteilung zugehörigen Ellipse $A_1' Z_1 C_1'$ ein.

Die absoluten Druckhöhen liegen nunmehr zwischen dem Paraboloide $A_1' B_1' C_1'$ und der Bodenfläche $D G E$ des Zylinders.

Der **Druck auf die Bodenfläche** $D G E$ in der Richtung der Achse $Z Z$ nach links ist gegeben durch das Gewicht des Wasserkörpers, der vom Paraboloide $A_1' B_1' C_1'$ rechts, von der Bodenfläche $D G E$ links und vom Kreiszylindermantel mit dem Durchmesser $D = 2 R$ begrenzt wird.

Beim nicht rotierenden Zylinder würde das Gewicht des schief geschnittenen Zylinders $D A_1' C_1' E D$, mit Wasser gefüllt, den Druck bestimmen.

Für die Ermittlung der Druckverteilung und des Gesamtdruckes in horizontaler Richtung bleiben die Abb. 31 und 32 (Taf. IV) vollständig aufrecht, wenn der Boden $D G E$ die Form irgend einer krummen Fläche hat; denn in diesem Falle baute sich die Druckverteilung und der Druckkörper über der Projektion dieser Fläche auf eine zur Z-Achse senkrechte Ebene auf, welche Projektion mit der Kreisfläche $D G E$ identisch ist.

An den Verhältnissen wird auch nichts geändert, wenn etwa der Zylinder durch den Deckel $D_1 E_1$ geschlossen ist.

Zur Bestimmung der Größe des Druckes ist von dem Gewichte des schief geschnittenen Zylinders $D A_1' C_1' E D$, welcher inhaltsgleich ist mit dem in der Höhe h_1 senkrecht zur Achse geschnittenen $D A_1 C_1 E D$, das Gewicht des Paraboloides $A_1' B_1' C_1'$ zu subtrahieren, und es handelt sich nun darum, das Volumen dieses schiefen Paraboloidabschnittes zu ermitteln.

Denkt man sich das Paraboloid $A_1' B_1' C_1'$ (Abb. 33, Taf. IV) durch Ebenen parallel $A_1' C_1'$ in Scheiben zerlegt, so kann jede solche Scheibe durch einen schiefen Zylinder mit der Achse $Z Z$ ersetzt werden. Das Volumen einer solchen schiefen Zylinderscheibe ist aber gleich dem Volumen einer Kreiszylinderscheibe, deren Höhe gleich ist der Breite des schiefen Gürtels parallel zur Achse $Z Z$. Die zu jedem solchen schiefen Schnitte zugehörige Kreisfläche erhält man durch Projektion, wie aus der Abbildung ohneweiters zu ersehen ist. Kreis $A_1 C_1$ ist die Projektion der Ellipse $A_1' C_1'$.

Auf diese Weise erhält man ein neues Rotationsparaboloid, dessen Achse mit der Zylinderachse $Z Z$ zusammenfällt, und dessen Inhalt gleich ist dem des schief geschnittenen.

Rauminhalt $A_1' B_1' C_1'$ = Rauminhalt $A_1 B_1 C_1$.

Der Rauminhalt des letzteren kann nach den früheren Erläuterungen leicht bestimmt werden, wenn sein Meridian bekannt ist (S. 3). Die Gleichung desselben soll nun aufgestellt werden.

Die Koordinaten der Parabel $A_1' B_1' C_1'$ seien mit x_1 und y_1, jene der neuen Parabel $A_1 B_1 C_1$ mit x und y be-

zeichnet. Erstere bezogen auf den Scheitel B_1' als Ursprung, letztere auf B_1, dem neuen Scheitel.

Für einen beliebigen Schnitt $G_1\,G_2$ ist nach Abb. 33, (Taf. IV)

$$\left.\begin{aligned} y &= y_1 + \frac{g}{\omega^2}, \\ x &= x_1 + y - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{\omega^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a).$$

Die Gleichung der Parabel $A_1'\,B_1'\,C_1'$ ist aus

$$h = \frac{r^2\,\omega^2}{2\,g} \qquad r^2 = 2 \cdot \frac{g}{\omega^2} \cdot h.$$

Für $r \ldots\ldots y_1$,

für $h \ldots\ldots x_1$ gesetzt,

folgt

$$y_1{}^2 = 2 \cdot \frac{g}{\omega^2} \cdot x_1 \text{ (Parabel } A'_1\,B'_1\,C'_1) \quad b).$$

Daraus folgt, daß der über dem Schnittpunkte B_1 der Parabel $A_1'\,B_1'\,C_1'$ mit der Zylinderachse $Z\,Z$ in der Paraboloidachse $Z_n\,Z_n$ gelegene Punkt F_1' der Brennpunkt der Parabel $A_1'\,B_1'\,C_1'$ ist. B_1 ist jener Punkt, in welchem nach früherem die Tangente unter 45^0 gegen die Horizontale geneigt ist.

Nach der 1. Gleichung des Paares a) ist

$$y^2 = y_1{}^2 + 2 \cdot \frac{g}{\omega^2} \cdot y_1 + \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2;$$

für $y_1{}^2$ den Wert aus b) eingesetzt, wird

$$y^2 = 2 \cdot \frac{g}{\omega^2}\,(x_1 + y_1) + \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad c).$$

Addiert man die Gleichungen a), so erhält man

$$x_1 + y_1 = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{\omega^2};$$

eingeführt in c), wird

$$y^2 = 2 \cdot \frac{g}{\omega^2} \cdot x \text{ (Parabel } A_1\,B_1\,C_1).$$

Die neue Parabel $A_1\,B_1\,C_1$ ist sohin kongruent mit der ursprünglichen $A_1'\,B_1'\,C_1'$, diese erscheint bloß in der Richtung $B_1'\,B_1$ um $B_1'\,B_1$ verschoben. Die Richtung $B_1'\,B_1$ schließt mit der Vertikalen einen Winkel ein, dessen Tangente $= \frac{1}{2}$ ist.

Der gesuchte Rauminhalt ist nunmehr

$$V = \frac{1}{2} R^2 \pi . \overline{B_1 Z_1} \quad m^3.$$

Es erübrigt noch die Bestimmung von $B_1 Z_1$, welches sich nach der Abb. 33 (Taf. IV), wie folgt, zusammensetzen läßt:

$$\overline{B_1 Z_1} = h_{A_1'} + R - \frac{1}{2} \frac{g}{\omega^2}.$$

Für das Paraboloid $A_1' B_1' C_1'$ ist die Druckhöhe über der Scheitelebene B_1'

$$h = \frac{r^2 \omega^2}{2g},$$

für Punkt A_1' ist

$$r = R - \frac{g}{\omega^2},$$

daher

$$h_{A_1'} = \left[R^2 - 2 . R . \frac{g}{\omega^2} + \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2\right] \frac{\omega^2}{2g},$$

$$h_{A_1'} = \frac{R^2 \omega^2}{2g} - R + \frac{1}{2} \frac{g}{\omega^2},$$

$$\overline{B_1 Z_1} = \frac{R^2 \omega^2}{2g} - R + \frac{1}{2} \frac{g}{\omega^2} + R - \frac{1}{2} \frac{g}{\omega^2},$$

$$\overline{B_1 Z_1} = \frac{R^2 \omega^2}{2g},$$

das heißt, es ist gerade so, als ob der Zylinder bei vertikaler Achse ZZ rotieren würde.

Es wird jetzt

$$V = \frac{1}{2} . R^2 \pi \left(\frac{R^2 \omega^2}{2g}\right) \quad m^3.$$

Bezeichnen wir die Umfangsgeschwindigkeit im Durchmesser $2R$ mit U_1, so ist

$$\frac{R^2 \omega^2}{2g} = \frac{U_1^2}{2g}$$

und

$$V = R^2 \pi . \frac{1}{2} . \frac{U_1^2}{2g} \quad m^3.$$

An die Stelle des schief geschnittenen Zylinders $D A_1' C_1' E D$ mit der paraboloidischen Höhlung $A_1' B_1' C_1'$ tritt der senkrecht zur Achse ZZ geschnittene Zylinder $D A_1 C_1 E D$ mit der Höhlung $A_1 B_1 C_1$. Verwandelt man das Paraboloid $A_1 B_1 C_1$ in den inhaltsgleichen Zylinder $A_1 C_1 N_1 M_1 A_1$, dessen Höhe bekanntlich der halben Paraboloidhöhe $\overline{B_1 Z_1}$ gleich ist, so ist der Druck auf die Bodenfläche

$$P = R^2 \pi . \left(h_1 - \frac{1}{2} . \frac{U_1^2}{2g}\right) . \gamma \; kg,$$

worin

R der Halbmesser des Zylinders in m,

h_1 die Druckhöhe in der Zylinderachse in m,

$\gamma = 1000\ kg/m^3$

einzusetzen sind.

Der Fall ist somit vollständig auf den des vertikalen Zylinders zurückgeführt, bei welchem außen über der Bodenfläche DGE die Druckhöhe h_1 ansteht.

Mit dieser Zurückführung ist auch die Ermittlung des Druckes auf den Spurzapfen der Francis-Turbinen mit liegender Welle erledigt. Es ist genau so vorzugehen wie bei einer mit stehender Welle[32]).

Die dort ermittelten Werte können bei der Anordnung mit liegender Welle unverändert zur Anwendung kommen.

Zentraler Ausgleich bei *J*.

Auf J lastet außen die absolute Druckhöhe h_1 (Abb. 31 und 32, Taf. IV). Es muß daher die Niveaufläche, welche die Zylinderachse ZZ als Erzeugende enthält, eine solche sein, welcher die absolute Druckhöhe $h_1 = \overline{JZ_1}$ zukommt.

Z_1 muß daher ein Punkt der Meridianparabel sein. Ihre Lage ist somit gegeben durch $A_2' B_2' Z_1 C_2'$; wenn die Winkelgeschwindigkeit dieselbe ist wie früher, so ist das entstandene Paraboloid kongruent mit $A_1' B'_1 C_1'$.

Zur Bestimmung des Druckes wäre es zu verschieben nach $A_2 B_2 C_2$.

Die Anordnung des zentralen Ausgleiches gibt den größten Druck. Der äußere Ringspalt führt zum kleinsten; ihm gehört zu $A_1 B_1 C_1$.

Ringspalt *XY*.

Die äußeren Druckhöhen im Kreise XY vom Durchmesser $2\,\rho_1$ sind gegeben durch die Erzeugenden des schief geschnittenen Zylinders $X P_3 Z_1 P_3 Y$, und zwar

$$\overline{XP_3} = h_1 - \rho_1,$$
$$\overline{YP_3} = h_1 + \rho_1.$$

Das Druckverteilungsparaboloid muß sich daher so einstellen, daß auf ihm die Ellipse $P_3 Z_1 P_3$ liegt, was in der Lage $A_3' P_3 B_3' P_3 C_3'$ geschieht.

Für die Ermittlung des Druckes ist wieder die Verwandlung in das inhaltsgleiche senkrecht abgeschnittene $A_3 B_3 C_3$ vorzunehmen.

---

[32]) Die Bezeichnung „stehende Welle“ ist nicht ganz zutreffend; doch ist sie gebräuchlich, und sie wurde daher entsprechend der Bezeichnung „liegende Welle“ verwendet.

Auf die Folgerungen hier des weiteren einzugehen, ist überflüssig; sie decken sich vollkommen mit den in den „Druckverhältnissen in einer um eine vertikale Achse rotierenden Wassermasse“ gezogenen (S. 7). Die Verwandtschaft der dortigen Abb. 3 und der vorliegenden Abb. 32 (Taf. IV) ist sofort zu erkennen.

Es ist noch anzugeben, auf welcher Grundlage die Abb. 31 und 32 (Taf. IV) zustande gekommen sind.

Angenommen wurde

$$\omega = 2\,\pi,$$
$$R = 1\ m.$$

Es ist

$$\overline{J Z_1} = h_1,$$
$$\overline{D A_1'} = h_1 - R.$$

Der Scheitel B_1' des Paraboloides liegt in $Z_n Z_n$, und zwar ist diese entfernt von $Z Z$ um

$$Z_n Z = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9{\cdot}81}{4\,\pi^2} = 0{\cdot}248\ m.$$

Die Höhe von A_1' über der Scheitelebene ist aus $h = \frac{r^2\,\omega^2}{2\,g}$ allgemein

$$h_{A_1'} = \left(R - \frac{g}{\omega^2}\right)^2 . \frac{\omega^2}{2\,g}.$$

Mit $R - \frac{g}{\omega^2} = 1 - 0{\cdot}248 = 0{\cdot}752\ m$

wird $$h_{A_1'} = \frac{0{\cdot}752^2 . 4\,\pi^2}{2 . 9{\cdot}81} = 1{\cdot}14\ m.$$

Trägt man im Maßstabe der Abbildung 1·14 *m* von A_1' nach links auf und projiziert den Endpunkt nach Z_n, so erhält man B_1', und die Parabel kann nach irgend einem Verfahren gezeichnet werden; sie muß auch durch C_1' gehen, welcher Punkt durch

$$\overline{E C_1'} = h_1 + R$$

festgelegt ist.

Druckverhältnisse bei verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten.

In Abb. 34 (Taf. IV), welche im Maßstabe der Abb. 31 und 32 (Taf. IV) nur mit größerer Druckhöhe h_1 gezeichnet ist, sind die Druckverhältnisse für folgende Winkelgeschwindigkeiten gezeichnet:

$\omega_1 = 2$ Paraboloid $B_1' A_1' B_1 C_1'$,
$\omega_2 = \pi$ „ $A_1' B_2' B_2 C_1'$,
$\omega_3 = 2\,\pi$ „ $A_1' B_3' B_3 C_1'$,
$\omega_4 = 3\,\pi$ „ $A_1' B_4' B_4 C_1'$.

Alle diese Paraboloide müssen durch die Ellipse $A_1' Z_1 C_1'$ hindurchgehen, wenn die Verbindung mit dem Außenraume durch den Ringspalt $D\,G\,E$ hergestellt ist.

Für
$$\omega = 0$$
wird
$$\frac{g}{\omega^2} = \infty,$$

es tritt die Druckverteilung nach der Ebene $A_1' Z_1 C_1'$ ein.

Je größer ω ist, desto näher rückt die Z_n-Achse an die Z-Achse heran.

Für $\omega = \infty$ würde $\frac{g}{\omega^2} = 0$ werden; beide Achsen fielen zusammen.

Zum Zwecke der Ermittlung des Gesamtdruckes wären die senkrecht geschnittenen Paraboloide für

$$\begin{array}{ll} \omega_1 = 2 & A_1 B_1 C_1, \\ \omega_2 = \pi & A_2 B_2 C_2, \\ \omega_3 = 2\pi & A_3 B_3 C_3, \\ \omega_4 = 3\pi & A_4 B_4 C_4 \end{array}$$

zu zeichnen, welche den eben angeführten inhaltsgleich sind. Der Druckkörper reicht dann von $D\,G\,E$ links bis zum Paraboloide rechts und liegt innerhalb des Zylinders vom Durchmesser $2R$.

Hat man kein Interesse an der graphischen Darstellung, sondern will man nur die Größe des Druckes, dann ist einfach zu schreiben:

$$P = R^2 \pi \left(h_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{U^2}{2g}\right) \cdot \gamma\, kg,$$

wo für U der Reihe nach zu setzen wäre

$$\begin{aligned} U_1 &= R \,.\, 2, \\ U_2 &= R \,.\, \pi, \\ U_3 &= 2R\pi, \\ U_4 &= 3R\pi. \end{aligned}$$

Es ist zu ersehen, daß der Druck umso kleiner wird, je größer die Winkelgeschwindigkeit ist.

Wegen
$$\omega_4 : \omega_3 : \omega_2 = 3 : 2 : 1$$
ist
$$\overline{B_3 Z_1} = 4\, \overline{B_2 Z_1}$$
und
$$\overline{B_4 Z_1} = 9\, \overline{B_2 Z_1}, \quad \left| \quad \frac{g}{\omega_2^2} : \frac{g}{\omega_3^2} : \frac{g}{\omega_4^2} = 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{9}. \right.$$

Mit $R = 1$ ergeben sich die einzelnen Meridianparabeln, wie folgt:

Für $\omega_1 = 2$ wird

$$\frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{4} = 2{\cdot}45.$$

Dieses Maß gibt $Z_n^1 Z_n^1$.

Mit $r = \frac{g}{\omega^2} - R = 1{\cdot}45$ wird $\frac{r^2 \omega^2}{2g} = 0{\cdot}43$;
von A_1' nach links aufgetragen erhält man B_1' in $Z_n^1 Z_n^1$.

Für $\omega = \pi$ wird $\frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\pi^2} = 0{\cdot}992.$

Dieses Maß liefert $Z_n^2 Z_n^2$ (fällt nahezu mit der obersten Erzeugenden $D A_1'$ zusammen).

Mit $r = R - \frac{g}{\omega^2} = 0{\cdot}008$ wird $\frac{r^2 \omega^2}{2g} = 0{\cdot}000032.$

Der Scheitel fällt nahezu mit A_1' zusammen.

Für $\omega = 2\pi$ wurden die Werte schon ermittelt:

$\frac{g}{\omega^2} = 0{\cdot}248$ gibt $Z_n^3 Z_n^3$,

mit $r = R - \frac{g}{\omega^2} = 0{\cdot}752$ wird $\frac{r^2 \omega^2}{2g} = 1{\cdot}14.$

Für $\omega = 3\pi$ wird $\frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{9\pi^2} = 0{\cdot}1105.$

Mit $r = R - \frac{g}{\omega^2} = 9{\cdot}89$ wird $\frac{r^2 \omega^2}{2g} = 3{\cdot}58$;
von A_1' nach links aufgetragen erhält man den Scheitel B_4' in $Z_n^4 Z_n^4$.

B. Zusammensetzung des Druckes auf den Spurzapfen oder des achsialen Schubes.

Da es sich hier um den Druck in horizontaler Richtung handelt, so hat die Form des Laufradbodens sowie der Austrittsfläche keinen Einfluß auf diesen. Maßgebend ist nur die Projektion der Flächen auf eine zur horizontalen Achse senkrechte Ebene, somit die Kreisflächen vom Durchmesser D_1, bezw. D_3.

Liegt die Turbinenachse um H_z *m* über *U. W.*, so ist die absolute Druckhöhe im Spalte in der horizontalen Radmittelebene

$$h_1 = h_a - H_z + \underbrace{H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g}}_{h_p}.$$

Für jede höher gelegene Ebene ist die absolute Druckhöhe um deren Entfernung von der Mittelebene kleiner, für jede tiefer gelegene größer als in der horizontalen Radmittelebene. Zu oberst beträgt diese Verkleinerung R_1, zu unterst ist die Vergrößerung vom selben Werte.

Es kann sich in der Gleichung für h_1 nur H_z ändern; c_1 bleibt wegen der Unveränderlichkeit der Winkel und des Gefälles gleich, damit auch h_p.

Im Saugrohr ist in der Höhe der Welle die absolute Druckhöhe

$$h_2 = h_a - H_z$$[33]),

Verkleinerung und Vergrößerung erfolgt wie zuvor.

Die Zusammensetzung soll so wie bei den Francis-Turbinen mit stehender Welle erfolgen.

Zugrunde gelegt ist dieselbe Turbine wie dort. Sie ist in Abb. 35 (Taf. IV) dargestellt, welche im Maßstabe der Abb. 13 bis 18 (Tafel II) gezeichnet wurde.

Als Mittelebene der Druckhöhenmessung werde die vertikale Radmittelebene EE angenommen.

1. Der Druck auf das Laufrad, herrührend von der Pressung im Raume S_1.

$$\overline{JZ} = h_1 = h_a - H_z + h_p.$$

$A_1' C_1'$ durch Z unter 45^0.

Vorausgesetzt ist die nicht entlastete Turbine, daher

$$\Omega = \frac{\omega}{2}.$$

Es ist $$u_1 = 7{\cdot}6\,m = R_1 \,.\, \omega,$$

$$\omega = \frac{u_1}{R_1} = \frac{7{\cdot}6}{1{\cdot}2} = 6{\cdot}33 \text{ Sek.}^{-1}.$$

$$\frac{g}{\omega^2} = 0{\cdot}245\,m,$$

$$\text{für } \Omega = \frac{\omega}{2} \text{ ist } \frac{g}{\Omega^2} = 4 \,.\, \frac{g}{\omega^2} = 0{\cdot}980\,m.$$

Damit ergibt sich die Achse des Paraboloides $Z_n^1 Z_n^1$.

$$\overline{ZB_1} = \frac{U_1^2}{2g} = \frac{1}{4} \,.\, \frac{u_1^2}{2g} = 0{\cdot}74\,m.$$

B_1' liegt in Z_u^1 horizontal entfernt von B_1 um $\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{\Omega^2} = 0{\cdot}490$.

Damit ergibt sich das Druckverteilungparaboloid $A_1' B_1' C_1'$ und das inhaltsgleiche $A_1 B_1 C_1$ ($\cong A_1 B_1 C_1$ der Abb. 13, Tafel II).

[33]) Vergleiche hiezu S. 12 und die folgenden.

Es wirkt somit von rechts nach links belastend:

$$P_r = \text{Gewicht } D\,A_1\,B_1\,C_1\,E\,D - \text{Kern } \overline{B_1\,J}.$$

2. Das Gewicht des Wassers im Laufrade

hat keinen Einfluß auf den achsialen Schub.

3. Der auf die Austrittsrotationsfläche und auf die linksseitigen Begrenzungsflächen des Laufrades nach rechts wirkende Druck.

$\overline{JB_4} = h_2 = h_a - H_z$.

$K'L'$ durch B_4 unter 45^0.

Der Druck auf die dem Saugrohre zugekehrten Flächen, deren Projektion die Kreisfläche vom Durchmesser D_3 ist, und auf den dem Raume S_2 zugekehrten Ring mit dem äußeren Durchmesser D_1, wenn σ_3 offen und die Widerstände in σ_2 angeordnet sind, zunächst ohne Rücksicht auf die Fliehkraft, ist gleich:

Gewicht des schief geschnittenen Zylinders:

$$D\,K'\,B_4\,L'\,E\,D - \text{Kern } \overline{B_4\,J},$$

welches auch gleich ist

$$\text{Gewicht } D\,K\,B_4\,L\,E\,D - \text{Kern } \overline{B_4\,J}.$$

Der Einfluß der Fliehkraft in S_2 ist unter der Annahme

$$\Omega = \frac{\omega}{2}$$

gegeben durch das Paraboloid mit dem Meridian $A_2^{u\prime}\,B_2^{u\prime}\,C_2^{u\prime}$, welches durch die Punkte $P_3^{u\prime}\,P_3^{u\prime}$ in $K'\,B_4\,L'$ hindurchgeht und kongruent ist mit $A_1'\,B_1'\,C_1'$. Das inhaltsgleiche symmetrische Paraboloid ist $A_2^u\,B_2^u\,C_2^u$, kongruent mit $A_1\,B_1\,C_1$.

Es wirkt somit im ganzen von links nach rechts (entlastend):

$$P_l = \text{Gewicht } D\,A_2^{u\prime}\,P_3^{u\prime}\,P_3^{u\prime}\,C_2^{u\prime}\,E\,D - \text{Kern } \overline{B_4\,J}$$

oder auch

$$P_l = \text{Gewicht } D\,A_2^u\,P_3^u\,P_3^u\,C_2^u\,E\,D - \text{Kern } \overline{B_4\,J},$$

wobei der Einfluß der Fliehkraft wieder ein verschwindend kleiner ist.

Als Differenz $P_r - P_l$ bleibt somit nach links wirkend:

$$P_1^{(1)} = \text{Gewicht } P_3^{u\prime}\,A_2^{u\prime}\,A_1'\,B_1'\,C_1'\,C_2^{u\prime}\,P_3^{u\prime} - \text{Kern } \overline{B_1\,B_4}$$
$$= \text{Gewicht } P_3^u\,A_2^u\,A_1\,B_1\,C_1\,C_2^u\,P_3^u - \text{Kern } \overline{B_1\,B_4}.$$

Schaltet man den Einfluß der Fliehkraft wie seinerzeit aus, und berücksichtigt man ihn dann später mit P_2, so ist

$$\boldsymbol{P_1^{(1)} = +\ \text{Gewicht } K\,A_1\,B_1\,C_1\,L\,K - \text{Kern } B_1\,B_4.}$$

Für diese Größe gelten unverändert die auf S. 16 und 17 angegebenen Gleichungen.

4. Die achsiale Reaktion R_z

ist wie bei der stehenden Welle zu ermitteln. Sie wirkt nach rechts.

5. Die Gewichte des Laufrades, der Welle und der übrigen mit der Welle verbundenen Bauteile.

Diese Gewichte haben hier keinen Einfluß auf den Spurdruck. Die Welle beeinflußt den letzteren nur dann, wenn sie innerhalb des Raumes zwischen Deckel und Austritt aus dem Saugrohre abgesetzt ist. Dann entstehen horizontale Wasserdrücke, welche sich auf der Spur abstützen und ihren Grund haben im Druckunterschiede zwischen den Räumen, in welchen die Ringe liegen, oder in der Ungleichheit der Ringe in demselben Druckraume.

In solchen Fällen ist sinngemäß nach Abschnitt B) 7 (S. 36) zu verfahren.

6. Sonstige achsiale Kräfte.

C. Vorkehrungen im Raume S_1 zur Entlastung des Spurzapfens.

Der Abschnitt C) (S. 40) kommt hier vollinhaltlich zur Anwendung.

Da es sich doch nur darum handelt, die Größe des Druckes zu bestimmen, so wird man die schief geschnittenen Paraboloide gar nicht erst zeichnen, sondern nur die inhaltsgleichen, senkrecht zur Achse geschnittenen, und diese sind identisch mit den jenem Abschnitte C) und den dazu gehörigen Abb. 13 bis 18 (Taf. II) entsprechenden.

Es ergeben sich daher der Reihe nach (Abb. 35, Taf. IV):

$P_1^{(1)} = +$ Gewicht $K A_1 B_1 C_1 L K -$ Kern $\overline{B_1 B_4}$.
$P_1^{(2)} = +$ Gewicht $K A_2 B_2 C_2 L K -$ Kern $\overline{B_2 B_4}$.
$P_1^{(3)} = +$ Gewicht $K A_3 B_3 C_3 L K -$ Kern $\overline{B_3 B_4}$.
$P_1^{(4)} =$ Null.
$P_1^{(5)} = - K (A_5) B_5 (C_5) L K +$ Kern $\overline{B_5 B_4}$.
$P_1^{(6)} = - K (A_6) B_6 (C_6) L K +$ Kern $\overline{B_6 B_4}$.

$+$ bedeutet Belastung (nach links),
$-$ bedeutet Entlastung (nach rechts).

D. Untersuchung der Druckverhältnisse im Raume S_2.

Diese deckt sich vollständig mit der im Abschnitte D) (S. 49) durchgeführten.

Auch die Abb. 19 bis 24 (Taf. III) sind ohne Änderung bei der liegenden Welle verwendbar.

Danach ergeben sich die einzelnen Werte $P_2^{(1)}$ bis $P_2^{(6)}$.

E. Rechnungsvorgang.

1. Ermittlung der hydrostatischen Belastung oder Entlastung P_1 ohne Rücksicht auf den Einfluß der Fliehkraft in S_2.

2. Ermittlung des Einflusses der Fliehkraft im Raume S_2, welchem die Größe P_2 entspricht.

3. Berechnung der achsialen Reaktion R_z.

4. Bestimmung des resultierenden Druckes P_w in der Richtung der Achse im Falle einer abgesetzten Welle.

5. Ermittlung etwaiger Horizontalschübe aus der Übertragung; ihre Summe sei mit P_z bezeichnet.

Es folgt dann der Druck auf den Spurzapfen oder der achsiale Schub aus der Gleichung:

$$P = P_1 + P_2 + R_z + P_w + P_z \; kg.$$

P_1, P_2, P_z können belastend oder entlastend sein;

R_z ist jedenfalls entlastend,

P_w und P_z, je nach Anordnung, belastend oder entlastend.

Bei der in Abb. 35 (Taf. IV) gezeichneten Anordnung der Turbine wirken Belastungen nach links, Entlastungen nach rechts.

Durch P erfährt die Welle, je nach Anordnung, eine Zug- oder Druck-(Knick-)Beanspruchung.

Bei Zwillingsturbinen entfällt wegen der symmetrischen Anordnung die Summe

$$P_1 + P_2 + R_z + P_w$$

aus dem Drucke auf den Spurzapfen.

Für die Beanspruchung der Welle auf Zug oder Druck (Knickung) bleibt sie aber auch bei Zwillingsturbinen bestehen, falls die Laufräder nicht etwa Rücken an Rücken angeordnet sind. In diesem Falle kommt P_1 überhaupt nicht zustande. Ist bei der Anordnung mit Rücken an Rücken die Etagenzahl links und rechts verschieden, so käme, strenge genommen, die Differenz der Reaktion links und rechts in Betracht; doch sind in diesem Falle die einzelnen Turbinen nahezu vollständig radial, so daß die achsiale Reaktion nur gering ist.

F. Traglager

Es ist noch anzugeben, mit welchem Betrage die Turbine samt der Welle die Traglager belastet.

Dieser Betrag ermittelt sich:

1. Aus dem Gewichte des ganzen Laufrades, vermindert um seinen Auftrieb; d. i. die Größe Gr'.

2. Aus dem Gewichte der Welle, vermindert um den Auftrieb des im Wasser befindlichen Teiles.

Das Gewicht des Wassers im Rade beeinflußt auch den Druck auf die Traglager nicht, da dieses Gewicht durch seinen gleich großen Auftrieb ausgeglichen wird. Doch läßt sich auch mit Hilfe der Abb. 35 und 36 (Taf. IV) ableiten, daß das Gewicht des Wassers im Rade keinen Anteil am Lagerdruck hat.

Auf die Eintrittsbreite des Laufrades $b_1 + 2\,k_1$ wirkt nach abwärts ein Druck, der gegeben ist durch das Gewicht des prismatischen Wasserkörpers,

dessen Höhe $h_1 = h_a - H_z + h_p$,
„ Breite D_1,
„ Länge $b_1 + 2\,k_1$ ist.

Da es sich um den Druck in vertikaler Richtung handelt, so sind die Druckhöhen durch die gedrückte Fläche zu begrenzen, d. h. der prismatische Körper reicht unten bis zu der nach oben konvexen Halbkreiszylinderfläche vom Durchmesser D_1.

Denkt man sich wieder das Laufrad und die Welle zwischen den Ebenen V und R aus Wasser, so wirkt weiter nach abwärts der Wasserinhalt des Zylinders vom Durchmesser D_1 und der Länge $b_1 + 2\,k_1$.

Auf den unteren Halbzylinder von der Länge $b_1 + 2\,k_1$ und dem Durchmesser D_1 wirkt wieder der Spaltdruck, dessen absolute Höhe in irgend einer Tiefe gegeben ist durch den Abstand der angenommenen Zylindererzeugenden von der Ebene $E_1\,E_1$. Es ist daher der nach aufwärts gerichtete Druck gegeben durch das Gewicht des prismatischen Wasserkörpers, der unten begrenzt ist von dem nach abwärts konvexen Halbzylinder, vom Durchmesser D_1 und von der Länge $b_1 + 2\,k_1$; von der horizontalen Mittelebene bleibt der Querschnitt unverändert rechteckig mit der Breite D_1 und der Länge $b_1 + 2\,k_1$ bis hinauf zur oberen Grenze, welche in $E_1\,E_1$ liegt.

Dieser nach aufwärts gerichtete Druck hebt den zuvor bestimmten nach abwärts gerichteten vollständig auf.

Ähnlich verfahren wir mit der Kranzzylinderfläche von der Länge b_k und dem Durchmesser $D_3 + 2\,k$. Sie steht unter dem in S_2 herrschenden Drucke, welcher abhängig ist von den Vorkehrungen, die im Abschnitte D) untersucht wurden. Es sei der einfachste Fall angenommen; σ_3 offen gegen das

Saugrohr, in σ_2 die Widerstände, in S_2 Rippen am Saugrohr, dann ist in S_2 lediglich der Saugdruck.

Es wirkt daher nach abwärts das Gewicht des prismatischen Wasserkörpers

mit der Höhe $h_2 = h_a - H_z$,
" " Breite $D_3 + 2\,k$,
" ". Länge b_k,

unten ist die Begrenzung die nach oben konvexe Halbzylinderfläche vom Durchmesser $D_3 + 2\,k$, oben die Ebene $O\,O$.

Nach abwärts wirkt ferner der Wasserinhalt des Zylinders vom Durchmesser $D_3 + 2\,k$ zwischen den Ebenen V und V'.

Nach aufwärts wirkt das Gewicht des Wasserkörpers, der unten von dem nach abwärts konvexen Halbzylinder begrenzt ist und von der horizontalen Mittelebene an mit der unveränderlichen Breite $D_3 + 2\,k$ und Länge b_k hinanreicht bis zur Ebene $O\,O$, in dieser Ausdehnung den eben ermittelten nach abwärts wirkenden Gewichten die Wage haltend.

Es bleibt somit von dem zwischen V' und R und den Zylinderflächen D_1 und $D_3 + 2\,k$ eingeschlossenen Wasserkörper nichts übrig als das Gewicht des Laufrades um seinen Auftrieb vermindert: G_r'; ferner von dem in Betracht gezogenen Wellenstücke zwischen V und R ebenfalls das um seinen Auftrieb verkleinerte Gewicht. Die Gewichte der Wasserkörper, die in den Zylindern eingeschlossen sind, und damit auch das Gewicht des im Rade befindlichen Wassers fallen hinaus, wie es sein muß, denn ihr Auftrieb ist ihrem Gewichte gleich.

G. Druck auf den Deckel.

Unter Zugrundelegung der Abb. 35 (Taf. IV) ist genau so zu verfahren, wie bei der Francis-Turbine mit stehender Welle.

$\overline{Z\,Z'} = H - h_p$ der Abb. 30 (S. 74) ist in Abb. 35 (Taf. IV) von Z nach rechts aufzutragen und durch den Endpunkt Z' eine vertikale Gerade zu ziehen, da man mit den senkrecht geschnittenen Paraboloiden einfacher arbeitet.

III.

Jonval-Turbinen.

Um das Verfahren an einem möglichst allgemeinen Beispiele zeigen zu können, wurde die in Abb. 37 (Tafel V) gezeichnete erweiterte Laufradform zugrunde gelegt.

Die Gewichte des Laufrades und aller übrigen mit der Welle verbundenen Bauteile sowie die achsiale Zahndruckkomponente sind ebenso wie bei der Francisturbine in Rechnung zu stellen. Es wird daher im Folgenden nur der hydrostatische und der hydrodynamische Teil des Spurdruckes behandelt.

Der in den Abb. 37 bis 40 (Tafel V) gezeichneten Turbine entsprechen folgende Verhältnisse:

$$H = 7{\cdot}0\,m, \qquad D_1 = 2{\cdot}6\,m, \quad \alpha_1 = 25^0, \quad \eta = 0{\cdot}84,$$
$$Q = 8{\cdot}0\,m^3/\text{Sek.}, \quad b_1 = 0{\cdot}4\,m, \quad \beta_1 = 90^0, \quad \eta_e = 0{\cdot}80,$$
$$u_1 = 7{\cdot}6\,m/\text{Sek.}, \qquad h_p = 3{\cdot}0\,m,$$
$$c_1 = 8{\cdot}4\,m/\text{Sek.}, \qquad n = 56 \text{ Uml./Min.},$$
$$N_e \backsim 600\,PS_e.$$

A. Aufstellung im Saugrohr.

a. Der hydrostatische Teil des Zapfendruckes.

1. Der Druck auf die Eintrittsfläche des Laufrades und auf die Kranzringe.

(Tafel V, Abb. 37).

Auf diesen Flächen lastet der absolute Spaltdruck, in Metern Wassersäule gegeben durch

$$h_1 = h_a - (H_u + H_r) + H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2\,g}.$$

Es soll wieder bedeuten

$$h_p = H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g}.$$

Der in Rede stehende nach abwärts wirkende Druck wird somit gegeben sein durch das Gewicht des Wasserkörpers, welcher durch Rotation des in der linken Hälfte der Abb. 37 (Tafel V) rechts ansteigend schraffierten Rechteckes $ABDCA$ um die Turbinenachse entsteht.

2. Der Druck auf die Laufkranzmäntel CE und DF.

Sieht man von einer allfälligen Rotation des Wassers in S_2 ab, und steht dieser Raum durch den genügend weiten Spalt bei E mit dem Saugraume in Verbindung, so ist in dem beliebigen im äußeren oder inneren Mantel in der Höhe H_M über $U.\ W.$ gelegenen Parallelkreise M die absolute Druckhöhe gemessen durch

$$h_M = h_a - H_M,$$

welche sofort aus der Figur erhalten wird.

Die Gewichte der beiden Wasserrotationskörper mit den horizontal schraffierten Mittelschnitten $GHCEG$, bezw. $JKFDJ$ (linke Hälfte der Abb. 37, Tafel V) geben den in Rede stehenden nach abwärts wirkenden Druck.

3. Das Gewicht des Wassers im Laufrade.

Wir denken uns auch gleich Kränze und Schaufeln aus Wasser, dann kommt nach abwärts wirkend hinzu das Gewicht des Wasserringes $CDFEC$, dessen Querschnitt vertikal schraffiert ist (Tafel V, Abb. 37, linke Hälfte).

Damit ist der nach abwärts wirkende Druck erschöpft, er ist gegeben durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers (Abb. 37, linke Hälfte) mit dem Mittelschnitte

$$ABJKFEGHA.$$

4. Der Druck auf die Austrittsfläche des Laufrades und auf die Kranzringe.

Nimmt man die absolute Druckhöhe im Austrittsquerschnitte an mit $h_2 = h_a - H_u$[34]),

so folgt diese wieder unmittelbar aus der Abbildung zwischen der Austrittsfläche und zwischen der Ebene OO, und es wird nach aufwärts ein Druck ausgeübt, der gegeben

---

[34]) Vergleiche hiezu S. 12, 13, 14.

ist durch das Gewicht des mit Wasser erfüllten Rotationskörpers, dessen Mittelschnitt

$$EFKGE$$

in der rechten Hälfte der Abb. 37 (Tafel V) links ansteigend schraffiert ist.

In der Abb. 37 subtrahiert sich dieser von selbst von dem nach abwärts wirkenden Druckkörper, so daß als hydrostatische Last, d. h. nach abwärts wirkend, das Gewicht P_1 des Wasserringes übrig bleibt, dessen Querschnitt

$$ABJHA$$

in beiden Hälften der Abb. 37 stark ausgezogen und in der rechten Hälfte dichter rechts ansteigend schraffiert wurde; es ist:

$$\boldsymbol{P_1 = (b_1 + 2k) . D_1 \pi . h_p . \gamma\ kg} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1),$$

wobei

$$h_p = H - (1 + \xi_0) . \frac{c_1^2}{2g}\ m \text{ Wassersäule}$$

und D_1 der mittlere Durchmesser des Laufrades in m,
b_1 die radiale Eintrittsbreite " " " m,
k die radiale Kranzbreite " " " m,
$\gamma = 1000\ kg/m^3$
einzusetzen ist.

Die Größe P_1 ist unabhängig von der Kranzform des Laufrades. Es gilt daher Gleichung 1) auch für zylindrische Kränze.

Das Gewicht des Wassers im Rade, welches seinem Auftriebe gleicht, fällt aus der Rechnung; damit verschwindet aber nicht auch die der Laufradhöhe entsprechende Druckhöhe, wie aus der Gleichung für h_p ersichtlich ist. Der Auftrieb der Laufradkränze und Schaufeln wurde bei der obigen Zusammensetzung ebenfalls erledigt.

Zur hydrostatischen Last kommt noch die an der Welle hängende Saugsäule von der Höhe H_W (Abb.37) hinzu; somit von der Welle herrührend

$$\boldsymbol{P_w = G_w + f . H_w . \gamma\ kg} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2),$$

wobei G_w das volle Gewicht der Welle und f der Wellenquerschnitt in m^2 ist.

b. Der hydrodynamische Teil des Zapfendruckes.

Der hydrodynamische Teil des Zapfendruckes besteht aus der achsialen Reaktion.

5. Die achsiale Reaktion.

$$R_z = \frac{(Q - q) . \gamma}{g} (w_1 \sin\beta_1 - w_2 \sin\beta_2)$$

oder $$\boldsymbol{R_z = \frac{(Q-q)\cdot\gamma}{g}(c_1 \sin\alpha_1 - c_2 \sin\alpha_2)\ kg} \quad . \quad 4),$$
wenn man den Spaltverlust q berücksichtigt.

Ist $c_2 \perp u_2$, dann wird $\alpha_2 = 90^0$ und

$$R_z = \frac{(Q-q)\cdot\gamma}{g}(c_1 \sin\alpha_1 - c_2).$$

Setzt man zylindrische Radkränze voraus, so ist bei Vernachlässigung der Schaufelstärken überall der gleiche Durchflußquerschnitt senkrecht zur Achse vorhanden. Es wäre dann $R_z = 0$.

Ist $\beta_1 = 90^0$, und sind die Schaufeln aus Blech überall von gleicher Stärke, dann ist der Austrittsring kleiner als der Eintrittsquerschnitt, beide senkrecht zur Achse gemessen, daher $R_z < 0$.

Bei Gußschaufeln mit abnehmender Stärke kann $R_z = 0$ wieder erreicht werden.

Bei erweitertem Laufrade wird der Austrittsring größer als die Eintrittsfläche, daher ist für diesen Fall $R_z > 0$.

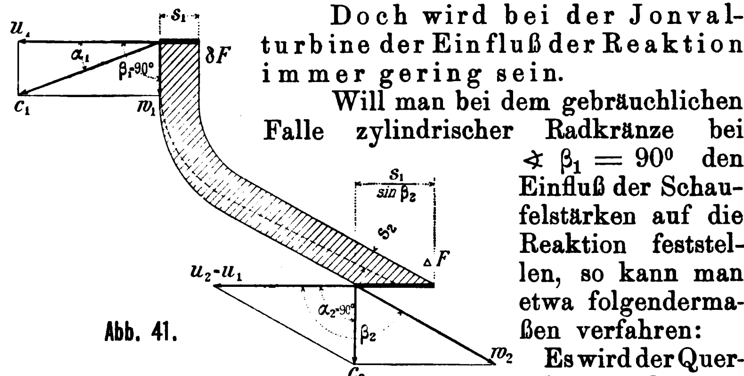


Abb. 41.

Doch wird bei der Jonvalturbine der Einfluß der Reaktion immer gering sein.

Will man bei dem gebräuchlichen Falle zylindrischer Radkränze bei $\sphericalangle\ \beta_1 = 90^0$ den Einfluß der Schaufelstärken auf die Reaktion feststellen, so kann man etwa folgendermaßen verfahren: Es wird der Querschnittsverlust in der Austrittsringfläche (Abb. 41).

$$\Delta F = \frac{\delta F}{\sin\beta_2},$$

wenn δF den Verlust in der Eintrittsfläche vorstellt.

Mit $\sin\beta_2 = 0{\cdot}33$
wird $\Delta F = 3.\ \delta F$.

Ist $\delta F = 0{\cdot}1\ F$, so ist dann $\Delta F = 0{\cdot}3\ F$, wenn mit F der volle Ringquerschnitt senkrecht zur Achse bezeichnet wird.

$$(0{\cdot}9\ F)\ .\ c_1\ .\ \sin\alpha_1 = (0{\cdot}7\ F)\ .\ c_2\ .\ \sin\alpha_2,$$

$$\frac{c_1 \sin\alpha_1}{c_2 \sin\alpha_2} = \frac{0{\cdot}7}{0{\cdot}9} = 0{\cdot}78; \text{ mit } \sphericalangle\ \alpha_2 \backsim 90^0 \text{ ist dann:}$$

$$R_z = \frac{(Q-q)\cdot\gamma}{g}\ .\ c_2\left[\frac{c_1 \sin\alpha_1}{c_2} - 1\right];$$

mit $q = 0{\cdot}02 \,.\, Q$ wird

$$R_z = -\frac{0{\cdot}98 \cdot 0{\cdot}22 \,.\, \gamma}{g} \,.\, Q \,.\, c_2.$$

$$\frac{c_2^2}{2g} = \varkappa \,.\, H\,;\; c_2 = \sqrt{2 g \varkappa} \,.\, \sqrt{H},$$

$$R_z = -(97 \,.\, \sqrt{\varkappa}) \,.\, Q \,.\, \sqrt{H}\; kg.$$

Für $\varkappa = 0{\cdot}04$ wäre $R_z = -19{\cdot}4 \,.\, Q \,.\, \sqrt{H}$ und bei $Q = 1\, m^3/\text{Sek.}$ und $H = 1 m$: $R_z = -19{\cdot}4\, kg$.

Wird $s_2 = s_1 \sin \beta_2$ gemacht, dann folgt

$\Delta F = \delta F$ und $c_1 \sin \alpha_1 = c_2$, daher $R_z = 0$.

R_z besteht aus dem achsialen hydraulischen Gesamtdrucke P_Δ und aus dem achsialen Schaufeldrucke Z_q.

6. Der achsiale hydraulische Gesamtdruck.

Längs der inneren Kranzflächen $C'E'$ und $D'F'$ (Abb. 43, S. 100) nimmt die absolute Druckhöhe ab

von $h_1 = A'C'$ (Abb. 43) $= A\,C$ (Abb. 37, Tafel V)

auf $h_2 = h_s - H_u = \overline{G'E'}$ (Abb. 43) $= \overline{G\,E}$ (Abb. 37).

In Abb. 43 (S. 100) sind die Druckverteilungskurven $A'G'$ und $B'K'$ nach Schätzung ihres möglichen Verlaufes eingetragen.[35])

Auf der inneren Kranzfläche $C'E'$ wirkt somit ein Druck nach aufwärts, der gegeben ist durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers mit dem Schnitte

$C'E'G'A'C'$ . . . . *a)*.

Bei der Bildung des hydrostatischen Teiles des Zapfendruckes wurde angenommen, daß auf die Ringfläche C_0E' nach aufwärts wirkt $C_0E'G'H'C_0$,

von welchem durch den nach abwärts wirkenden Teil

$C_0E'C'C_0$

des Gewichtes des Wassers im Laufrade ein gleich großer aufgehoben wird, so daß auf $C'E'$ nach aufwärts wirkend übrig blieb ein Druck, der gegeben ist durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers

$C'E'G'H'C'$ . . . . *b)*.

Bildet man die Differenz der beiden Körper *a)* u. *b)*, um die es sich hier handelt, so bleibt noch negativ, d. h. nach aufwärts wirkend in Rechnung zu stellen das Gewicht des Wasserrotationskörpers mit dem Schnitte

$F_\Delta' = G'A'H'G'$.

Verfährt man auf der inneren Kranzfläche $D'F'$ in gleicher Weise, so bleibt negativ der Umdrehungskörper mit dem Schnitte $F_\Delta'' = K'B'J'K'$.

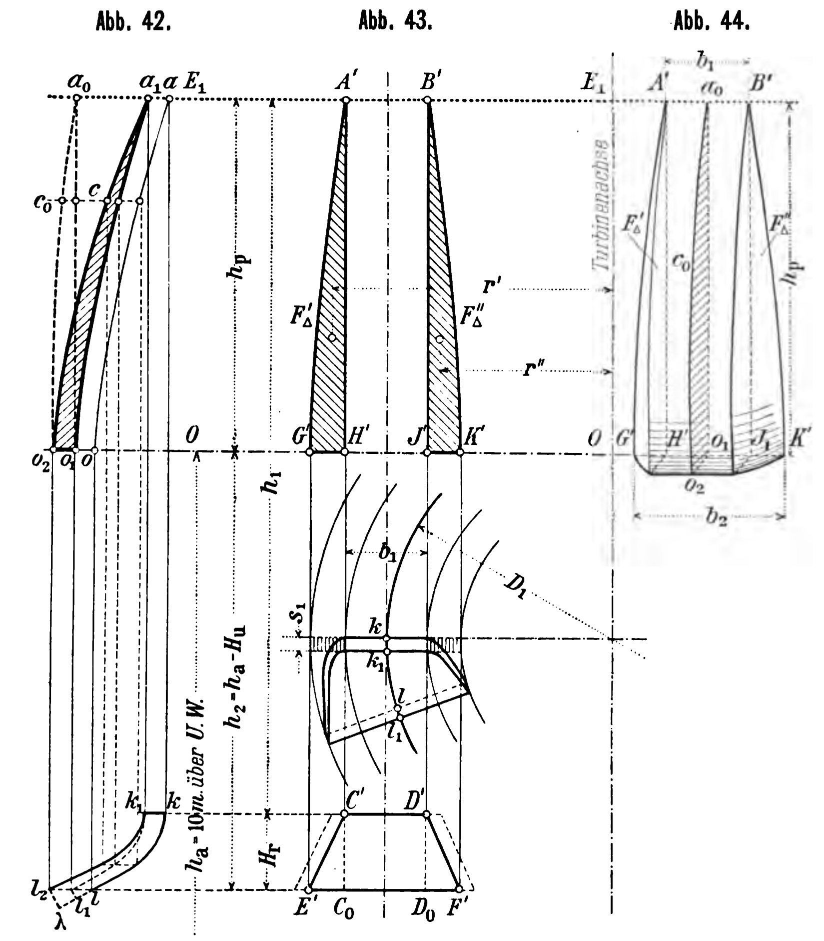
[35]) Vergleiche hiezu S. 25.

Beide zusammen geben den **achsialen hydraulischen Gesamtdruck**:

$$\boldsymbol{P_\Delta = -\gamma \cdot [\underbrace{F_\Delta' \cdot 2 r' \pi}_{V_\Delta'} + \underbrace{F_\Delta'' \cdot 2 r'' \pi}_{V_\Delta''}]\ kg} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 3).$$

F_Δ' u. F_Δ'' sind in m^2,
r' u. r'', die Halbmesser der Schwerpunktskreise der Flächen F_Δ' und F_Δ'', sind in m,
γ ist mit 1000 kg/m^3 einzusetzen;
V_Δ' u. V_Δ'' sind die Rauminhalte der beiden Rotationskörper in m^3.

Abb. 42. Abb. 43. Abb. 44.



Läßt man die übliche Näherung zu, daß in einem Horizontalschnitte mit dem für den mittleren Parallelkreis gültigen Werte des Druckes gerechnet werden darf, so wird mit $\overline{E' C_0} = \overline{F' C_0}$ (Abb. 43): $F_\Delta' = F_\Delta'' = F_\Delta$.

Die Gleichung 3) erhält dann die Form:

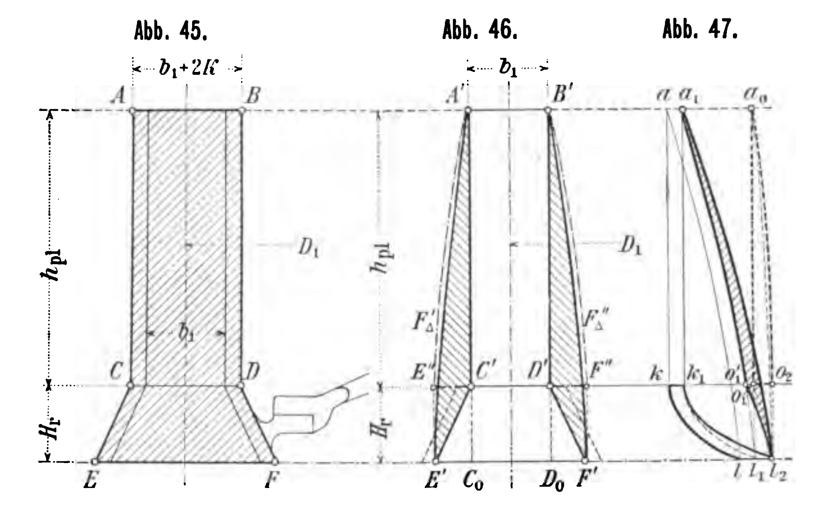
$$P_\Delta = -\gamma . (2 F_\Delta) . (r' + r'') . \pi.$$

Nun ist aber: $r' + r'' = D_1$ und daher auch

$$\boldsymbol{P_\Delta = -\gamma . (2 F_\Delta) . D_1 \pi \quad kg} \quad . \; . \; . \; . \quad 3').$$

Beide Werte, 3) und 3'), gelten für unendlich dünne Schaufeln.

Geht man auf die Berücksichtigung der endlichen Schaufelstärke über, so kann, wie folgt, verfahren werden:



α) Der Schnitt der Schaufel mit einem beliebigen Zylinder habe überall die gleiche Breite $s_1 = \overline{k\,k_1} = \overline{l\,l_1}$.

Wie aus Abb. 42 (S. 100) zu ersehen ist, tritt in diesem Falle an der Schaufel keine Druckdifferenz auf. An den inneren Kranzflächen $C'E'$ und $D'F'$ entsteht aber durch jede Schaufel ein Flächenverlust von der Größe

$$s_1 . F_\Delta' + s_1 . F_\Delta'' ;$$

oder mit $\qquad F_\Delta' = F_\Delta'' = F_\Delta : \; s_1 . (2 F_\Delta),$

wenn man noch voraussetzt, daß s_1 auch in allen Zylinderschnitten gleich ist.

Bei z_1 Schaufeln im Laufrade ist der Flächenverlust:

$$\gamma . z_1 s_1 . (2 F_\Delta)$$

und daher auch die achsiale Druckdifferenz

$$P_\Delta^{(1)} = -\gamma . (2 F_\Delta) . D_1 \pi + \gamma . z_1 . s_1 . (2 F_\Delta),$$

woraus sich ergibt:

$$\left.\begin{aligned} P_\Delta^{(1)} &= -k_1 \cdot \gamma \cdot (2\,F_\Delta) \cdot D_1 \pi \, kg = k_1 \cdot P_\Delta \\ \text{mit} \quad k_1 &= 1 - \frac{z_1 s_1}{D_1 \pi} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 3\,a).$$

β) Nimmt die horizontale Schnittbreite $\overline{k_1\,k}$ zu auf $\overline{l\,l_2}$, wie etwa in dem Falle gleicher Schaufelstärke senkrecht zum Profil gemessen, so ergeben sich an den Schaufeln Druckdifferenzen, wie aus Abb. 42 (S. 100) zu ersehen ist. Die daraus entstehenden Körper haben ungefähr die in Abb. 44 (S. 100) dargestellte Form und sind positiv.

Bezeichnet man den Rauminhalt eines solchen Druckdifferenzkörpers mit v, so wäre jetzt:

$$P_\Delta^{(2)} = -k_1 \cdot \gamma\,(2\,F_\Delta) \cdot D_1 \pi + \gamma \cdot z_1 \cdot v,$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} P_\Delta^{(2)} &= -k_2 \cdot \gamma\,(2\,F_\Delta) \cdot D_1 \pi \, kg = k_2 \cdot P_\Delta \\ \text{mit} \quad k_2 &= k_1 - \frac{z_1 \cdot v}{(2\,F_\Delta) \cdot D_1 \pi} \\ \text{und} \quad k_1 &= 1 - \frac{z_1 \cdot s_1}{D_1 \pi} \end{aligned}\right\} \quad . \; 3\,b).$$

Die Form des Schaufelendes $l\,\lambda\,l_2$ statt $l\,l_2$ ist ohne Einfluß (S. 33).

Inwieweit die Annahme zutrifft, daß der Druck im Parallelkreise unveränderlich sei, wurde bei der Francisturbine erörtert (S. 33).

Bei der üblichen Form der Jonval-Turbine mit zylindrischen Radkränzen ist

$$P_\Delta = P_\Delta^{(1)} = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3\,a');$$

für den Fall β) ist bei zylindrischen Radkränzen:

$$P_\Delta^{(2)} = +\gamma \cdot z_1 \cdot v_0 \quad kg \quad . \; . \; . \; . \quad 3\,b'),$$

in welcher Gleichung unter v_0 der Rauminhalt des mittleren Teiles des in Abb. 44 (S. 100) dargestellten Druckdifferenzkörpers in m^3 zu verstehen ist.

7. Der achsiale Schaufeldruck.

Aus

$$R_z = P_\Delta + Z_q \quad \text{(S. 24)}$$

folgt für den achsialen Schaufeldruck

$$Z_q = R_z - P_\Delta.$$

Für zylindrische Kränze und unendlich dünne Schaufeln

$$\left.\begin{aligned} \text{ist} \quad R_z &= O \\ \text{und} \quad P_\Delta &= O \end{aligned}\right\} \quad \text{daher } Z_q = O.$$

Für zylindrische Kränze und Fall β) (S. 102)

ist $R_z < O$ und $P_\Delta^{(2)} > O$ } daher $Z_q < O$.

c. Der Druck auf den Spurzapfen.

Unter Ausschluß der von der Übertragung herrührenden achsialen Kräfte wäre der Druck auf den Spurzapfen zusammenzusetzen nach:

$$P = P_1 + R_z + G_r' + P_w + G_g \quad . \quad . \quad . \quad 5).$$

P_1 [Gleichung 1)] ist positiv,
R_z [Gleichung 4)] ist je nach Anordnung positiv, negativ oder Null (Einfluß gering),
P_w [Gleichung 2)] ist positiv;
G_r', das um seinen Auftrieb verminderte Laufradgewicht, und
G_g, das Gewicht des Zapfenkörpers, sind positiv.

d. Entlastung des Spurzapfens.

Zu diesem Zwecke wird die Laufradscheibe mit großen Öffnungen versehen, so daß S_1 zum Saugraume gehört. Dies wurde auch bei der vorhergehenden Zusammensetzung angenommen.

Wird durch Ausflußwiderstände der Spaltdruck abgedrosselt, dann kann man gegenüber dem oben besprochenen Falle eine Entlastung des Zapfens erreichen, wenn man die Verbindungsöffnungen zwischen Saugraum und S_1 am Orte der größten Umfangsgeschwindigkeit der Laufradscheibe anordnet und die Oberseite dieser Scheibe mit Rippen versieht (Tafel V, Abb. 37, rechte Hälfte), so daß das Wasser in S_1 mit der Winkelgeschwindigkeit des Rades rotiert. Es fällt dann in S_1 der Druck von $h_1 = \overline{DJ}$ nach einem Rotationsparaboloide JSJ ab, dessen Scheitel um $\frac{u_D^2}{2g}$ unter der Ebene OO liegt, wenn mit u_D die Umfangsgeschwindigkeit im Parallelkreise D bezeichnet wird.

Das Gewicht des Paraboloides, vermindert um den Kern ZS von Wellenstärke, gibt die erreichte Entlastung:

$$P_2 = -\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{u_D^2}{2g} \cdot r_D^2 \pi \cdot \gamma - f \cdot \left(\frac{u_D^2}{2g} \cdot \gamma\right)\right]$$

oder

$$P_2 = -\gamma \cdot \frac{u_D^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot r_D^2 \pi - f\right) \quad kg \quad . \quad . \quad 6),$$

wenn mit $2 r_D$ der Durchmesser des Parallelkreises D in m und mit f der Wellenquerschnitt in m^2 bezeichnet wird.

Verwandelt man den Druckkörper vom Gewichte P_1 in den Zylinder $LQJJL$ über der Grundfläche $r_D^2 \pi$ und

das Paraboloid JSJ in den Zylinder $MNJJM$ über der gleichen Grundfläche, so ist dessen Höhe

$$\overline{MJ} = \overline{M'J} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ZS},$$

und es hat jetzt der Zapfen zu übertragen:

$$P_1' = r_D^2 \pi \cdot \overline{M'L} \cdot \gamma + f \cdot \overline{ZS} \cdot \gamma \quad kg,$$

während früher war:

$$P_1 = r_D^2 \cdot \pi \cdot \overline{JL} \cdot \gamma \quad kg.$$

B. Anordnung ohne Saugrohr.

Aus der Energiegleichung für den Austritt aus dem Leitrade folgt der absolute Spaltdruck in *m* Wassersäule

$$h_1 = h_a + H_0 - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2\,g}.$$

Bezeichnet man den Unterschied der absoluten Druckhöhen, welche den Druck im Spalte einerseits und den Druck außerhalb des Spaltes andererseits messen, mit h_{pl}, so ist für den vorliegenden Fall:

$$h_{pl} = h_1 - h_a = H_0 - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2\,g}.$$

Diese Größe entspricht bei Aufstellung im Saugrohre dem

$$h_p = H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2\,g},$$

denn dort sind die beiden in Betracht kommenden Druckhöhen h_1 einerseits und $h_a - (H_u + H_r)$ andererseits.

1. Das Laufrad liegt ganz im Unterwasser.

(Tafel V, Abb. 38).

$$h_1 = h_a + H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2\,g},$$

$$h_{pl} = H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2\,g} = h_p$$

wegen

$$H_0 = H.$$

Es ändert sich somit am Drucke auf den Spurzapfen nichts; nur die an der Welle hängende, belastende Saugsäule entfällt.

Von dem ins Unterwasser tauchenden Wellenstücke ist ebenso wie von den im Unterwasser liegenden Teilen des Laufrades der Auftrieb in gewöhnlicher Weise zu berücksichtigen.

R_z und seine Teile P_Δ und Z_q sind wie oben zu berechnen; sie behalten dieselben Werte.

In Abb. 38 (Tafel V) wurde die Zusammensetzung des Druckes auf dieselbe Art vorgenommen wie in Abb. 37 (Tafel V). Links sind die Mittelschnitte der nach abwärts wirkenden Druckkörper rechts ansteigend schraffiert gezeichnet, rechts die nach aufwärts wirkenden durch links ansteigende Strichlage hervorgehoben.

Der resultierende hydrostatische Druck P_1 ist stark ausgezogen und in der rechten Hälfte stärker schraffiert.

Das Gewicht des Wassers im Rade entfällt auch hier.

2. Das Laufrad liegt ganz über dem Unterwasser.

(Tafel V, Abb. 40).

$$h_1 = h_a + H_0 - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g} = h_a + h_{pl}.$$

Trägt man jetzt über dem Eintrittsquerschnitte des Laufrades $h_a = 10\,m$ auf, und setzt man darüber

$$h_{pl} = H_0 - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g} = H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g} - H_r =$$
$$= h_p - H_r$$

an, so hat man über dem Spalte die absolute Druckhöhe h_1 aufgetragen und kommt in dieselbe Ebene $E_1 E_1$ wie in Abb. 37 (Tafel V).

Setzt man nun wie bei der Aufstellung im Saugrohre den Druck auf den Spurzapfen zusammen, so erhält man zunächst für den **hydrostatischen Teil:**

α) Nach abwärts wirkend (Tafel V, Abb. 40, linke Hälfte, rechts ansteigend schraffiert):

1. den Druck auf die Eintrittsfläche des Laufrades und auf die Kranzringe $ABDCA$;

2. den Druck auf die Kranzmäntel

$GHCEG$ und $KJDFK$,

da in jedem Parallelkreise der Mantelflächen die absolute Druckhöhe $h_a = 10\,m$ ist;

3. das Gewicht des Wassers im Rade

$CDFEC$,

wobei wieder Laufradkränze und Schaufeln aus Wasser gedacht sind.

Es ergibt sich somit nach abwärts wirkend:

$ABJKFEGHA$.

β) Nach aufwärts wirkt (Tafel V, Abb. 40, rechte Hälfte, links ansteigend schraffiert):

4. der Druck auf die Austrittsfläche des Laufrades und auf die Kranzringe $GKFEG$,

entsprechend der maßgebenden absoluten Druckhöhe im Austrittsquerschnitte, welche wegen seiner Lage im *U. W.*-Spiegel $h_a = 10\,m$ ist.

γ) Subtrahiert man die beiden zuletzt umgrenzten Wasserkörper, was sich in der graphischen Darstellung übrigens von selbst vollzieht, so bleibt schließlich belastend übrig *A B J K G H A*,
in beiden Hälften der Abb. 40 (Taf. V) stark ausgezogen und rechts auch stärker schraffiert.

Vergleicht man diesen Druckkörper mit jenen, welche den durch die Abb. 37 und 38 (Tafel V) dargestellten Anordnungen entsprechen, so sieht man, daß auch er die Höhe

$$h_p = H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g}$$

hat. Während aber in den beiden herangezogenen Fällen die Form des Druckkörpers lediglich bestimmt ist durch die radiale Erstreckung des Laufrades im Spalt und durch die Überdruckhöhe daselbst und wegen des Watens des Laufrades im Wasser unbeeinflußt bleibt von der Form des Rades, tritt diese bei der Anordnung über *U. W.* in der Form des Druckkörpers deutlich hervor. Auch hier ist die Überdruckhöhe im Spalt $h_{p1} = h_p - H_r$ maßgebend, aber statt der Druckhöhe des Rades tritt das Gewicht des Wassers G belastend hinzu, denn dieses wird hier durch keinen Auftrieb ausgeglichen, ebenso wenig wie das aus Wasser gedachte Laufrad einen Auftrieb erfährt; auch dies ist deutlich aus der Abb. 40 (Tafel V) zu ersehen, denn im Wasserkörper *H J K G H* ist das aus Wasser gedachte Laufrad enthalten.

Bei der Aufstellung über *U. W.* bleibt somit das Gewicht G des Wassers im Rade in der Rechnung, und es ist das Laufrad mit seinem vollen Gewichte in der Luft G_r zu berücksichtigen.

Der hydrostatische Teil des Zapfendruckes, die Größe P_1, wäre jetzt zu rechnen aus:

$$P_1 = (b_1 + 2\,k) \cdot D_1\,\pi \cdot h_{p1} \cdot \gamma + G \quad kg \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

mit

$$h_{p1} = H - H_r - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g}.$$

Im Falle des Freihängens um H_f wäre

$$h_{p1} = H - (H_r + H_f) - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g},$$

wobei auch in der Gleichung für c_1 statt H zu setzen wäre $H - H_f$.

Übrigens arbeitet man bei der Aufstellung über *U. W.* fast bequemer mit den Überdruckhöhen (Abb. 45, S. 101). Im Spalt *C D* ist die Überdruckhöhe (gegen h_a) gegeben

durch h_{pl}. Trägt man daher h_{pl} über CD auf, so erhält man AB und damit den belastenden Druckkörper

$$ABDCA.$$

Dazu kommt belastend das Gewicht des Wassers im Laufrade samt diesem aus Wasser gedacht; das gibt den Druckkörper

$$CDFEC.$$

Beide zusammen geben denselben Wert für P_1 wie vorher [Gleichung 7)].

Der hydrodynamische Teil, die **achsiale Reaktion R_z**, erfährt keine Änderung.

Bestimmt man auch die Teile der achsialen Reaktion, so ergibt sich zunächst der **achsiale hydraulische Gesamtdruck P_Δ** ebenfalls einfacher mit den Überdruckhöhen (Abb. 46, S. 101):

Längs der inneren Kranzfläche $\overline{C'E'}$ sinkt der Druck von $h_{pl} = \overline{A'C'}$ (Abb. 46, S. 101) $= \overline{AC}$ (Abb. 45, S. 101) auf den Überdruck Null in E'.

Es erfährt daher die Kranzfläche $C'E'$ einen Druck nach aufwärts, der gegeben ist durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers mit dem Schnitte

$$F_\Delta' = A'C'E'A'.$$

Verfährt man auf der inneren Kranzfläche $D'F'$ in gleicher Weise, so erhält man ebenfalls negativ das Gewicht des Wasserrotationskörpers mit dem Schnitte

$$F_\Delta'' = B'D'F'B'.$$

Beide zusammen geben (Abb. 46, S. 101):

$$P_\Delta = -\gamma \cdot [\underbrace{F_\Delta' \cdot 2\,r'\,\pi}_{V_\Delta'} + \underbrace{F_\Delta'' \cdot 2\,r''\,\pi}_{V_\Delta''}] \quad kg \quad . \; . \; 8).$$

Bezeichnungen und Maße wie bei der Aufstellung im Saugrohr (S. 100).

Unter denselben Voraussetzungen wie dort kommt man auf die Gleichung:

$$P_\Delta = -\gamma \cdot (2\,F_\Delta) \cdot D_1\,\pi \quad kg \quad . \; . \; . \; 8')$$

Die Werte 8) und 8') gelten für unendlich dünne Schaufeln und werden nicht geändert, wenn man E' und F' (Abb. 46, S. 101) nach E'' und F'' projiziert, wodurch man zwei rechtwinklige Dreiecke $F_\Delta' = A'C'E''$ und $F_\Delta'' = B'D'F''$ erhält, welche in ihrer Form ähnlich sind den Dreiecken $A'H'G'$ und $B'J'K'$ der Abb. 43 (S. 100). In Abb. 46 (S. 101) haben sie die Höhe h_{pl}, in Abb. 43 die Höhe h_p.

Geht man bei der Berücksichtigung der endlichen Schaufelstärken so vor wie bei der Aufstellung im Saugrohr, so erhält man zunächst für den Fall α) (S. 101) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P_\Delta^{(1)} &= -k_1 \cdot \gamma \cdot (2\,F_\Delta) \cdot D_1 \pi \; kg = k_1 \cdot P_\Delta, \\ \text{mit} \quad k_1 &= 1 - \frac{z_1\, s_1}{D_1 \pi} \end{aligned}\right\} \;.\; 8\,a).$$

$F_\Delta = F_\Delta' = F_\Delta''$ ist eine der zuletzt bezeichneten Flächen (Abb. 46, S. 101).

Der Fall β) (S. 102) liefert die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P_\Delta^{(2)} &= -k_2 \cdot \gamma \cdot (2\,F_\Delta) \cdot D_1 \pi \, kg = k_2 \cdot P_\Delta \\ \text{mit} \quad k_2 &= k_1 - \frac{z_1\, v}{(2\,F_\Delta) \cdot D_1 \pi} \\ \text{und} \quad k_1 &= 1 - \frac{z_1 \cdot s_1}{D_1 \pi} \end{aligned}\right\} \;.\; 8\,b).$$

F_Δ hat den oben angegebenen Wert. v erhält man mit Abb. 47 (S. 101), wie folgt: Die Druckdifferenzfläche an der Schaufel in einem mittleren Zylinderschnitte ist dargestellt durch:

$$a_1\, o_1'\, l_2\, a_1.$$

Verwandelt man diese in die inhaltsgleiche $a_0\, o_1\, l_2\, a_0$ und weiter in $a_0\, o_1\, o_2\, a_0$ von der Höhe h_{pl}, so erhält man eine ähnliche Figur wie in Abb. 42 (S. 100). Legt man nun eine Reihe von Zylinderschnitten, so bekommt man schließlich den Druckdifferenzkörper an der Schaufel, welcher eine Form erhält, die jener der Abb. 44 (S. 100) ähnlich ist, nur hat der Körper die Höhe h_{pl}, während er in Abb. 44 die Höhe h_p hat.

Der Rauminhalt dieses Körpers ist v.

Bei zylindrischen Radkränzen ist so vorzugehen wie bei der Aufstellung im Saugrohr (S. 102).

Vergleicht man die Abb. 46 (S. 101) und 43 (S. 100), so sieht man, daß bei der Aufstellung im Saugrohr der Absolutwert von P_Δ um die Gewichte der beiden Wasserringe:

$$C'\,E'\,C_0\,C' \quad \text{und} \quad D'\,F'\,D_0\,D'$$

größer ist als bei der Anordnung in freier Luft.

Der zweite Teil der achsialen Reaktion, der **achsiale Schaufeldruck** Z_q ergibt sich aus der Gleichung

$$Z_q = R_z - P_\Delta.$$

Unter Ausschluß der von der Übertragung herrührenden achsialen Kräfte wäre somit der Druck auf den Spurzapfen zusammenzusetzen nach:

$$P = P_1 + R_z + G_r + G_w + G_g \quad . \; . \; . \; . \quad 9).$$

In dieser Gleichung bedeuten:

G_r das volle Gewicht des Laufrades in kg,
G_w „ „ „ der Welle „ kg,
G_g „ „ „ des Zapfenkörpers in kg.

Alle drei belasten den Zapfen.
P_1 [Gleichung 7)] ist positiv,
R_z [Gleichung 4)] je nach Anordnung positiv, negativ oder Null (Einfluß gering).

3. Das Laufrad taucht teilweise ins Unterwasser.

(Tafel V, Abb. 39).

Die Zusammensetzung hat wie vorhin zu erfolgen. Der Druck auf die Kranzmäntel setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Für den Teil, der untertaucht, ist der Druckkörper durch $G\,G_1$, bezw. $K\,K_1$ begrenzt; für den über *U. W.* liegenden reicht der Druckkörper vom Mantel hinauf bis $G_1\,H$, bezw $K_1\,J$.

Von Interesse ist die Form des die Größe P_1 darstellenden resultierenden Druckkörpers

$$A\,B\,J\,K_1\,G_1\,H\,A,$$

welcher ebenfalls die Höhe $h_p = H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2\,g}$ hat. Der eine Teil baut sich auf über der radialen Breite des Laufrades im Spalt mit der Überdruckhöhe

$$h_{p1} = h_p - H_r'$$

daselbst, der andere Teil $H\,J\,K_1\,G_1\,H$ wird gebildet vom Gewichte des Wassers in jener Hälfte des Laufrades, welche über das Unterwasser emporragt.

In dem eben umgrenzten Körper ist auch das Gewicht des aus Wasser gedachten über *U. W.* liegenden Laufradstückes enthalten, was besagen will, daß von diesem Stücke kein Auftrieb abzuziehen ist. Was hingegen vom Wasserinhalte des Laufrades untertaucht, wird durch den gleich großen Auftrieb ausgeglichen. Dieser Teil des Laufrades wird auch um seinen Auftrieb leichter.

C. Grenzturbinen.

Bei der reinen Grenzturbine herrscht im Spalt und außerhalb desselben der gleiche Druck. Kennzeichnend für die Grenzturbine ist daher, daß die Überdruckhöhe, welche den Unterschied zwischen den Drücken innerhalb und außerhalb des Spaltes mißt, verschwindet.

1. Aufstellung im Saugrohr.

Die eben bezeichnete Überdruckhöhe ist hier

$$h_p = H - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2\,g}.$$

Wird $h_p = 0$,

so fällt in Abb. 37 (Tafel V) $\overline{AB}$ nach $\overline{HJ}$ und der, die **hydrostatische Last** $\boldsymbol{P_l}$ darstellende Druckkörper verschwindet, was übrigens auch aus der Gleichung 1) für P_1 folgt.

Es ist somit bei der reinen Grenzturbine im Saugrohr

$$\boldsymbol{P_l} = \textbf{Null} \quad \ldots \ldots \quad 10).$$

Der **achsiale hydraulische Gesamtdruck** $\boldsymbol{P_\Delta}$ wird hier, wie aus Abb. 43 (S. 100) ersichtlich, wegen $h_p = 0$

$$\boldsymbol{P_\Delta} = \boldsymbol{0} \quad \ldots \ldots \quad 11),$$

und zwar für unendlich dünne Schaufeln ebenso wie für solche von endlicher Stärke (Abb. 42, S. 100).

2. Anordnung ohne Saugrohr.

Liegt das **Laufrad ganz im** ***U. W.*** (Tafel V, Abb. 38), so decken sich die Verhältnisse vollständig mit den eben erörterten.

Liegt das **Laufrad ganz über** ***U. W.*** (Tafel V, Abb. 40), so ist die Überdruckhöhe

$$h_{pl} = H_0 - (1 + \xi_0) \cdot \frac{c_1^2}{2g}.$$

Wird $h_{pl} = 0$,

so verschwindet vom Druckkörper der obere Teil mit der Höhe h_{pl}, und es bleibt lediglich das Gewicht G des Wassers im Rade übrig; das gleiche Ergebnis liefert die Gleichung 7) für P_1.

Es ist somit bei der reinen Grenzturbine, welche ganz über *U. W.* liegt:

$$\boldsymbol{P_l} = \boldsymbol{G} \quad \ldots \ldots \quad 12).$$

Wie aus Abb. 46 (S. 101) ersichtlich ist, wird wegen

$$h_{pl} = 0$$

$$\boldsymbol{P_\Delta} = \boldsymbol{0} \quad \ldots \ldots \quad 13),$$

und zwar für unendlich dünne Schaufeln ebenso wie für solche von endlicher Stärke (Abb. 47, S. 101).

IV.

Die neue Theorie und der Druck auf den Spurzapfen.

A. Grundzüge der neuen Theorie.[36])

Zum Zwecke einer bestimmten Vorstellung legen wir bei den folgenden Entwicklungen eine Francisturbine mit lotrechter Welle zugrunde.

Wie bei der üblichen Schaufelungs- und Berechnungsweise denken wir uns das Laufrad in Turbinenschichten unterteilt.

Wir wollen jedoch unendlich viele Schichten und unendlich viele Schaufelflächen mit verschwindend kleiner Stärke voraussetzen, derart, daß das ganze Laufrad aus Kanälen zusammengesetzt ist, von welchen jeder einen arbeitenden Stromfaden führt, dessen Querschnittsabmessun-

---

[36]) Prášil, Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen. „Schweiz. Bauzeitung" 1903, Bd. 41.

Lorenz, Neue Grundlagen der Turbinentheorie. „Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen" 1905.

Lorenz, Theorie und Berechnung der Vollturbinen und Kreiselpumpen. „Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure" 1905, S. 1670.

Bauersfeld, Zuschrift zu dieser Arbeit in der „Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure" 1905, S. 2007, und Erwiderung von Lorenz, S. 2008.

Lorenz, Folgerungen aus den neuen Grundlagen der Turbinentheorie. „Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen" 1906, S. 105.

Um an die zuletztgenannten vier Arbeiten anschließen zu können, wurde in dem laufenden Abschnitte nach Lorenz die absolute Geschwindigkeit mit w bezeichnet; ihre Umfangskomponente mit w_n, ihre radiale Komponente mit w_r, ihre achsiale mit w_z. (In den vorhergehenden Abschnitten wurde für die absolute Geschwindigkeit der Buchstabe c verwendet.) 1 kennzeichnet den Eintritt in das Laufrad, 2 den Austritt aus demselben.

gen beliebig klein gedacht werden können, so daß wir uns denselben auch als materielle Stromlinie vorstellen dürfen.

Jede Schichte besteht demnach aus einer Schar von kongruenten Stromfäden und es sind daher der Druck und die Geschwindigkeit in demselben Parallelkreise unveränderlich und im Beharrungszustande auch unabhängig von der Zeit. Jedem Parallelkreise kommt ein bestimmter Druck und eine bestimmte Geschwindigkeit zu.

Für jeden Stromfaden gilt strenge die Beziehung

$$(w_n\, u)_1 - (w_n\, u)_2 = g \cdot \eta \cdot H,$$

welche wegen der Kongruenz der Stromfäden in derselben Schichte auch strenge gültig ist für diese selbst. Die Gleichung ist als Grundgleichung der Turbinenberechnung bekannt.[87])

Mit
$$u_1 = r_1\, \omega$$
$$u_2 = r_2\, \omega$$
erhält man

$$\frac{\omega}{g} \cdot \Big[(w_n\, r)_1 - (w_n\, r)_2\Big] = \eta \cdot H = L_1,$$

die hydraulische Leistung von 1 *kg* Wasser. Da für alle Turbinenschichten das gleiche Gefälle H gilt und der hydraulische Wirkungsgrad η gleich angenommen werden kann, so wird man von jeder Schichte die gleiche hydraulische Leistung, auf die gleiche Wassermenge bezogen, verlangen können. Diese Gleichheit wird sich dann ergeben, wenn für alle Schichten der Unterschied der Momente der Bewegungsgrößen, bezogen auf die Masseneinheit

$$(w_n\, r)_1 - (w_n\, r)_2$$

denselben Wert hat.

Mit Rücksicht auf die Beaufschlagung des Laufrades und auf die Wasserführung durch das Saugrohr ist es notwendig, daß die Ein- und Austrittsringe der aufeinanderfolgenden Schichten in Rotationsflächen angeordnet werden. Die Form dieser Flächen ist durch die ihrer Meridiane bestimmt, welche in der r, z-Ebene liegen.

Es wird daher
der Meridian der Eintrittsfläche die Gleichung $f_1\,(r, z) = K_1$
„ „ „ Austrittsfläche „ „ $f_2\,(r, z) = K_2$
haben können.

Die Form der Meridiane ist durch die Form der Funktion $f\,(r, z)$ bestimmt und bei gleicher Form der Funktion ist die Lage des Meridians durch die Größe von K gegeben.

---

[87]) Z. B. Gleichung 4) der Berechnung der Reaktionsturbinen von Prof. Pfarr: „Hütte“, 19. Aufl., I. Bd., S. 825,

$$w_1\, u_1 \cos \delta_1 - w_2\, u_2 \cos \delta_2 = g \cdot \varepsilon \cdot H_n.$$

Schneiden wir die beiden Rotationsflächen durch eine beliebige dritte, in welcher wir uns gleich eine Schar kongruenter Stromfäden angeordnet denken können, so gilt für die Schnittkreise die unveränderliche Differenz $K_1 - K_2$.

Bestimmen wir demnach K_1 durch $(w_n r)_1$, K_2 durch $(w_n r)_2$, so erhalten wir für alle Schichten die unveränderliche Differenz $(w_n r)_1 - (w_n r)_2$; gleichzeitig wird

$(w_n r)_1$ unveränderlich für die ganze Eintrittsfläche,
$(w_n r)_2$ „ „ „ „ Austrittsfläche

des Laufrades.

Die Form der beiden Funktionen $f_1(r, z)$ und $f_2(r, z)$ muß nicht die gleiche sein; doch wird man zweckmäßig für beide Meridiane Kurven gleicher Art annehmen, so daß also

der Eintrittsmeridian die Gleichung $(w_n r)_1 = f(r, z)$,
„ Austrittsmeridian „ „ $(w_n r)_2 = f(r, z)$

erhält.

In der Eintrittsfläche beginnt die Energieabgabe, in der Austrittsfläche ist sie beendet, diese beiden Flächen sind daher Energieniveauflächen (Flächen gleicher Arbeitsentnahme nach Lorenz). Für den Meridian einer dazwischen liegenden Fläche gilt dann

$$w_n r = f(r, z) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

und es ist somit für jeden Parallelkreis die Größe der Umfangskomponente w_n der absoluten Geschwindigkeit w gegeben.

Verarbeitet eine der Turbinenschichten die Gewichtsmenge

$$\gamma \,.\, d\,Q \ kg/\text{Sek.},$$

so ist ihr Beitrag zur Gesamtleistung

$$d\,L = \eta \,.\, H \,.\, \gamma \,.\, d\,Q = \omega \,.\, \frac{\gamma}{g}\, d\,Q \,.\, \Big[(w_n r)_1 - (w_n r)_2\Big]\, mkg/\text{Sek.};$$

oder wegen

$$L = M \,.\, \omega,$$

ihr Beitrag zum übertragenen Gesamtmomente

$$d\,M = \frac{\gamma}{g}\, d\,Q \,.\, \Big[(w_n r)_1 - (w_n r)_2\Big]\, mkg.$$

Die hydraulische Gesamtleistung ist infolge der Gleichheit der Differenz in der Klammer für alle Schichten:

$$L = \eta \,.\, Q \,.\, \gamma \,.\, H = M \,.\, \omega = \omega \,.\, \frac{\gamma}{g}\, Q \,.\, \Big[(w_n r)_1 - (w_n r)_2\Big] =$$

$$= \frac{\gamma}{g} \,.\, Q \,.\, \Big[(w_n u)_1 - (w_n u)_2\Big]\, mkg/\text{Sek.} \quad . \; . \quad 2)$$

und das Gesamtmoment:

$$M = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot \left[(w_n r)_1 - (w_n r)_2\right] mkg. \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Die Gleichungen, welche streng für einen Stromfaden gelten, können also mit strenger Richtigkeit auch für das ganze Laufrad verwendet werden, wenn die Strömung derart geführt wird, daß die Änderung des Momentes der Bewegungsgröße für alle Schichten dieselbe ist.[38])

Im Saugrohre wird man zweckmäßig eine rein strömende und keine kreisende Bewegung verlangen.

Die erstere tritt ein, wenn

$$w_{n2} = 0$$

wird, d. h. wenn

$$w_2 \perp u_2$$

ist; eine Annahme, welche auch bei der gewöhnlichen Schaufelungsweise in der Regel zugrunde gelegt wird.

Für diesen Fall ist die Gleichung des Meridianes der Austrittsfläche:

$$f(r, z) = 0.$$

Ferner wird:

$$(w_n u)_1 = g \cdot \eta \cdot H$$

oder

$$\frac{\omega}{g} \cdot (w_n r)_1 = \eta H = L_1 = M_1 \cdot \omega.$$

Weiter folgt:

$$M = \frac{Q \cdot \gamma}{g} \cdot (w_n r)_1 \; mkg \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4)$$

und

$$L = \eta \cdot Q \cdot \gamma \cdot H = M \cdot \omega = \frac{Q \gamma}{g} \cdot (w_n u)_1 \; mkg/\text{Sek.} \quad . \quad 5)$$

---

[38]) Setzt man

$$(w_n r)_1 - (w_n r)_2 = \int d\,(w_n r),$$

so ist das Moment für eine Schichte

$$d\,M = \frac{\gamma}{g} \cdot d\,Q \cdot \int d\,(w_n r),$$

und es folgt daher als allgemeine Gleichung für das abgegebene Gesamtmoment

$$M = \frac{\gamma}{g} \int\int d\,Q \cdot d\,(w_n r) \; mkg.$$

· Anders abgeleitet von Lorenz: „Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure“ 1905, S. 2008.

M ist das Drehmoment des Druckes, welchen das Wasser infolge der besonderen Art seiner Bewegung unter Energieabgabe auf die Schaufeln ausübt,[39])

L die Leistung, welche vom Wasser an die Schaufeln abgegeben wird.

Bei dem üblichen Entwurfe des Laufrades werden die Grenzflächen der Schichten nach Ermittlung der Austrittsbreiten der Teilturbinen bei gleichen Eintrittsbreiten mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung mit dem Laufradboden und dem Kranze „ähnlich" verlaufend eingezeichnet. Da Zwischenpunkte fehlen, so ist der Verlauf ziemlich unsicher und mehr oder weniger willkürlich.

Wir vermeiden diese Unsicherheit und kennzeichnen den „ähnlichen" Verlauf schärfer dadurch, daß wir die Meridiane der Schichtflächen, zu welchen auch Boden und Kranz gehören, als Kurven gleicher Art bilden, welchen wir die Gleichung

$$\Psi = F(r, z) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

zuweisen können.

Die Energieabgabe erfolgt mittels der Schaufelflächen, Die Schichtflächen können daher nur Leitflächen zur Erzielung einer bestimmten Wasserbewegung sein. Als solche werden sie entbehrlich, wenn die Strömung derart geführt wird, daß in einem Parallelkreise der unendlich dünnen Schichtfläche zu beiden Seiten derselben der gleiche Druck und die gleiche Geschwindigkeit herrschen. In diesem Falle ersetzt sie eine Schar kongruenter Stromlinien, welche beiden Schichten gemeinsam ist, sie ersetzt eine Stromfläche.

Da wir unendlich viele Schichten vorausgesetzt haben, so können wir uns das Laufrad aus unendlich vielen übereinander gelagerten Stromflächen bestehend vorstellen, von welchen jede aus einer Schar kongruenter Stromlinien gebildet wird. Druck und Geschwindigkeit ändern sich stetig von Stromfläche zu Stromfläche. Jede Stromfläche kann durch eine Grenzfläche ersetzt und diese wieder entfernt werden, ohne daß hiedurch die Strömungsverhältnisse geändert werden. Das ist offenbar nur dann möglich, wenn die ganze Wassermasse in gleichmäßiger Strömung begriffen ist und an keiner Stelle stromlose, wirbelerfüllte Räume vorhanden sind, d. h. wenn die Strömung kontinuierlich und wirbelfrei ist.

---

[39]) Es wurde hier dieses Moment positiv eingeführt, um die Grundgleichung (S. 112) in der gewohnten Form beibehalten zu können.

Professor Lorenz führt das äußere Moment positiv ein; infolgedessen erscheint in seinen Ansätzen für das obige Drehmoment $(-M)$. In diesem Sinne sind die $-M$ auf S. 125 und auf S. 145 zu verstehen.

Die Strömung erfüllt dann die Bedingung der **Kontinuität**, wenn an keiner Stelle des Laufrades, welches uns zunächst interessiert, eine Änderung der Wassermenge eintritt, welche im Beharrungszustande durch den Eintrittsquerschnitt zuströmt. Nehmen wir also irgendwo im Laufrade ein ringförmiges mit dem letzteren koachsiales Raumelement an (Abb. 48), so darf in diesem die Wassermenge, welche demselben zufließt, keine Änderung erfahren.

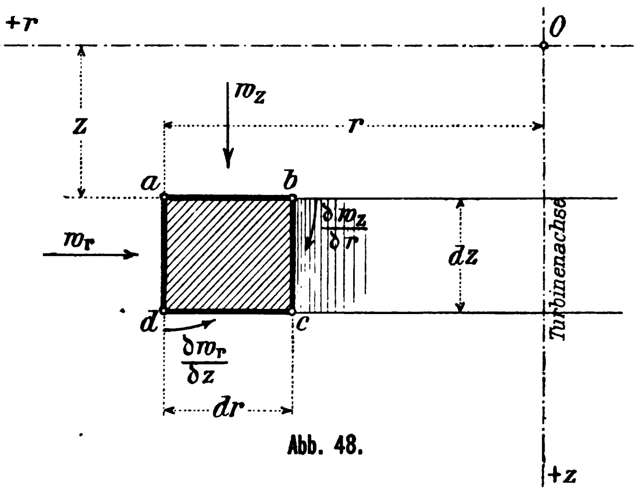


Abb. 48.

Diese Forderung findet ihren Ausdruck durch die Gleichung

$$\frac{\partial (w_z r)}{\partial z} + \frac{\partial (w_r r)}{\partial r} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7),$$

welche Form die **Kontinuitätsbedingung**, auf Zylinderkoordinaten bezogen, annimmt.[40])

---

[40]) In das ringförmige Raumelement strömt in der Zeiteinheit ein das Volumen

$$(2 r \pi \,.\, d r) \,.\, w_z + (2 r \pi \,.\, d z) \,.\, w_r.$$

Die Änderung des ersten Teiles ist

$$\frac{\partial (2 r \pi \,.\, d r \,.\, w_z)}{\partial z} \,.\, d z = 2 \pi \,.\, d r \,.\, \frac{\partial (w_z r)}{\partial z} \,.\, d z,$$

die Änderung des zweiten Teiles

$$\frac{\partial (2 r \pi \,.\, d z \,.\, w_r)}{\partial r} \,.\, d r = 2 \pi \,.\, d z \,.\, \frac{\partial (w_r r)}{\partial r} \,.\, d r.$$

Die Änderung des eingeströmten Volumens soll Null sein; daraus folgt

$$2 \pi \,.\, d r \,.\, d z \,.\, \frac{\partial (w_z r)}{\partial z} + 2 \pi \,.\, d r \,.\, d z \,.\, \frac{\partial (w_r r)}{\partial r} = 0$$

oder

$$\frac{\partial (w_z r)}{\partial z} + \frac{\partial (w_r r)}{\partial r} = 0.$$

Ableitungen finden sich auch in den auf S. 111, Fußnote [36]) angeführten Arbeiten von **Prašil** und **Lorenz**.

Dieser Gleichung wird genügt mit

$$w_z\, r = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \text{und} \quad w_r\, r = -\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$ [41])

woraus folgt

und

$$\left.\begin{aligned} w_z &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ w_r &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \; 8).$$

Ist somit

$$\Psi = F(r, z) \quad \ldots\ldots\ldots \; 6)$$

bekannt, so geben die beiden Gleichungen 8) die Geschwindigkeitskomponenten w_r und w_z; aus

$$w_n\, r = f(r, z) \quad \ldots\ldots\ldots \; 1)$$

ergibt sich die Umfangskomponente

$$w_n = \frac{1}{r} \cdot f(r, z) \quad \ldots\ldots\ldots \; 9),$$

so daß für jeden Parallelkreis die Geschwindigkeit w aus

$$w^2 = w_r^2 + w_z^2 + w_n^2$$

gerechnet werden kann.

Geht die Strömung derart vor sich, daß in keinem der Ringelemente (Abb. 48) die Querschnitte Drehungen um Achsen ausführen, welche senkrecht zu den Querschnittsebenen stehen, so ist in unserem Falle die Strömung wirbelfrei.

Um dies zu erreichen, ist die Gleichung

$$\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} = 0$$ [42]) $\ldots\ldots$ 10)

---

[41]) $\dfrac{\partial (w_z r)}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial r . \partial z}, \quad \dfrac{\partial (w_r r)}{\partial r} = -\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial z . \partial r}.$

Wegen $$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r . \partial z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z . \partial r}$$

ist $$\frac{\partial (w_z r)}{\partial z} = -\frac{\partial (w_r r)}{\partial r} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial (w_z r)}{\partial z} + \frac{\partial (w_r r)}{\partial r} = 0.$$

[42]) Bezieht man sich auf den Querschnitt $a\,b\,c\,d$ der Abb. 48, so wird eine solche Drehung dann nicht eintreten, wenn die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Endpunkte b und c in bezug auf eine durch a gehende, zu $a\,b\,c\,d$ senkrecht stehende Achse Null ist.

Nun ist die Winkelgeschwindigkeit von b in bezug auf a

$$\frac{\partial w_z}{\partial r},$$

zu erfüllen. Mit den Gleichungen für w_r und w_z verglichen, ergibt die Bedingung der Wirbelfreiheit eine Einschränkung in der freien Wahl der Funktion

$$\Psi = F(r, z).$$

Die Schaufelfläche enthält alle gleichzeitigen relativen Wasserwege, welche in einer gemeisamen in der Eintrittsfläche gelegenen Kurve beginnen.

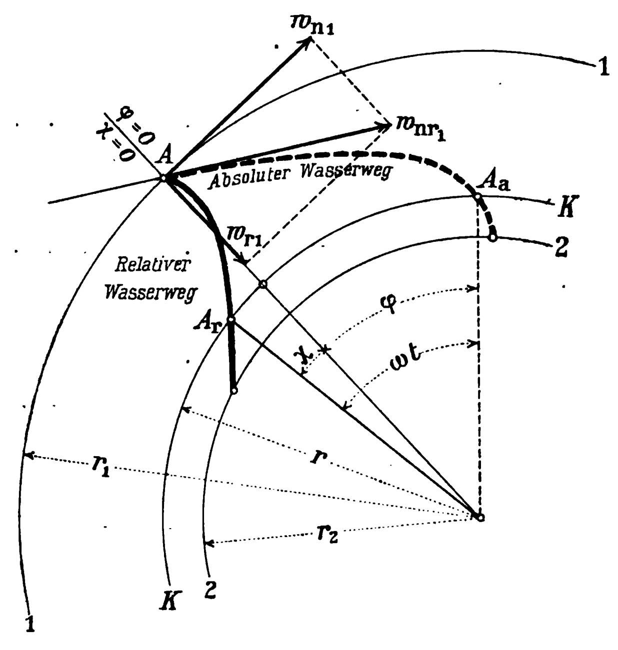


Abb. 49.

Der relative Wasserweg liegt immer in einer Stromfläche. Für den Grundriß desselben ergibt sich die Gleichung (Abb. 49):

---

die Winkelgeschwindigkeit von *d* in bezug auf *a*

$$\frac{\partial w_r}{\partial z},$$

und daher die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Eckpunkte gegen *a*

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r}\right),$$

welche Null wird mit

$$\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} = 0.$$

Die Ableitung der Bedingungen für eine wirbelfreie Strömung findet sich in Prašil, „Schweiz. Bau-Zeitung“ 1903, Bd. 41, Nr. 19.

Die oben aufgeschriebene Bedingung wurde auch von Bauersfeld eingeführt und von Lorenz in den „Folgerungen“ erfüllt (Fußnote [36]) auf S. 111).

$$\chi = \varphi - \omega \, . \, t = - \int\limits_{r_1}^{r} \frac{f(r, z)}{r \, . \, \frac{\partial \Psi}{\partial z}} \, . \, d\, r + \omega \, . \int\limits_{r_1}^{r} \frac{r}{\frac{\partial \Psi}{\partial z}} \, . \, d\, r \text{ [43]) } 11),$$

in welcher der erste Ausdruck rechts dem absoluten Wasserwege zugehört.

Die Gleichung gibt die Beziehung zwischen dem relativen Wasserwege, den Energieniveauflächen $w_n \, r = f(r, z)$ und den Stromflächen $\Psi = F(r, z)$.

Um einen solchen relativen Wasserweg oder besser ausgedrückt, um einen Kanal mit sehr kleinen Abmessungen und kreisförmigem Querschnitte zu erhalten, welcher Kanal einen arbeitenden Stromfaden führt, ist uns die Wahl der beiden Funktionen freigestellt, nur bei $\Psi = F(r, z)$ ist die Bedingung der Wirbelfreiheit zu erfüllen.

---

[43]) Lorenz, „Z. d. V. deutscher Ingenieure" 1905, S. 1672.
Zunächst erhält man für den absoluten Wasserweg:

$$\left. \begin{array}{l} w_n \, . \, d\, t = r \, . \, d\, \varphi \\ w_r \, . \, d\, t = d\, r \end{array} \right\} d\, \varphi = \frac{w_n}{w_r} \, . \, \frac{d\, r}{r};$$

$$\left. \begin{array}{ll} w_n = \frac{1}{r} \, . \, f(r, z) & \text{nach Gleichung } 9) \\ w_r = - \frac{1}{r} \, . \, \frac{\partial \Psi}{\partial z} & \text{„} \quad \text{„} \quad 8) \end{array} \right\} d\, \varphi = - \frac{f(r, z)}{r \, . \, \frac{\partial \Psi}{\partial z}} \, . \, d\, r,$$

$$\varphi = - \int\limits_{r_1}^{r} \frac{f(r, z)}{r \, . \, \frac{\partial \Psi}{\partial z}} \, . \, d\, r.$$

Um den Weg $A\, A_a$ zurückzulegen, braucht das Wasserteilchen die Zeit t.

Vor dieser Zeit war der Punkt A_a der Schaufel um $\omega\, t$ im Kreise KK vom Halbmesser r zurück in A_r; $A\, A_r$ ist daher der relative Wasserweg, für welchen somit folgt:

$$\chi = \varphi - \omega\, t.$$

Aus

$$w_r \, . \, d\, t = d\, r$$

erhält man

$$d\, t = \frac{d\, r}{w_r}$$

und

$$t = \int\limits_{r_1}^{r} \frac{d\, r}{w_r} = - \int\limits_{r_1}^{r} \frac{r}{\frac{\partial \Psi}{\partial z}} \, . \, d\, r;$$

damit ergibt sich die oben im Texte aufgeschriebene Gleichung für den relativen Wasserweg.

Wählen wir also beispielsweise:

$w_u r = b^2 r^2 - c^2 z^2$ (Hyperbeln) für die Energieniveauflächen und

$\Psi = a r^2 z$ für die Stromflächen,

so erhalten wir für bestimmte Annahmen (S. 145) die Abb. 50, in welcher für fünf Stromflächen die relativen Wasserwege oder besser gesagt für sich gefaßte arbeitende Stromfäden mit kreisförmigem Querschnitte gezeichnet sind. Jede Stromfläche besteht aus kongruenten Stromfäden.

In der Abb. 50 sind nun drei verschiedene Anordnungen der untereinanderliegenden Stromfäden gezeichnet derart, daß dieselben in einer gemeinsamen Kurve der Eintrittsfläche beginnen. Solcher Anordnungen sind unendlich viele denkbar.

Um eine Schaufel zu erhalten, ist es naheliegend, eine einhüllende Fläche an die Kanäle mit kreisförmigem Querschnitte zu legen oder, was dasselbe ist, die relativen Wasserwege durch eine Fläche zu verbinden, welche dann als Schaufelfläche zu gelten hätte.

Solcher Schaufelflächen wären unendlich viele denkbar, welche alle die Eigentümlichkeit hätten, daß sie mit derselben Stromfläche kongruente Schnittlinien ergäben, nämlich immer den relativen Wasserweg, welcher der betreffenden Stromfläche zugehört.

Diese Willkür in der Formgebung der Führungsfläche bei einem Aufbaue derselben aus unveränderlichen Elementen, vermag wohl Bedenken wachzurufen, welche ein näheres Eingehen auf die Wasserbewegung im Laufrade erheischen.

Die Bewegung des Wassers im Laufrade ist eine gezwungene Relativbewegung[44]), der die relativen Wasserwege als Zwangsbahnen zugehören, welche auf der Schaufelfläche verlaufen, so daß diese zur Führungsfläche wird. Als solche wirkt sie mit einer gewissen Zwangskraft (gleich der Zwangsbeschleunigung, wenn auf die Masseneinheit bezogen) auf das Wasser, welche Kraft senkrecht steht auf der Zwangsbahn und da eine Führungsfläche vorliegt, auch senkrecht auf dieser.

Diese Zwangsbeschleunigung (mit q und ihre Komponenten mit q_u, q_r, q_z bezeichnet) ist neben der Schwerkraft als äußere Kraft in die hydrodynamischen Grundgleichungen einzuführen, welche dann, auf Zylinderkoordinaten bezogen, die folgende Form annehmen:[45])

---

[44]) Lorenz, „Lehrbuch der techn. Physik“, I. Bd., S. 93, S. 122 und die folgenden.

[45]) Lorenz, „Z. d. V. deutscher Ing.“ 1905, S. 1670.
Lorenz, „Z. f. d. gesamte Turbinenwesen“, 1905, Heft 17 und 1906, Heft 7.

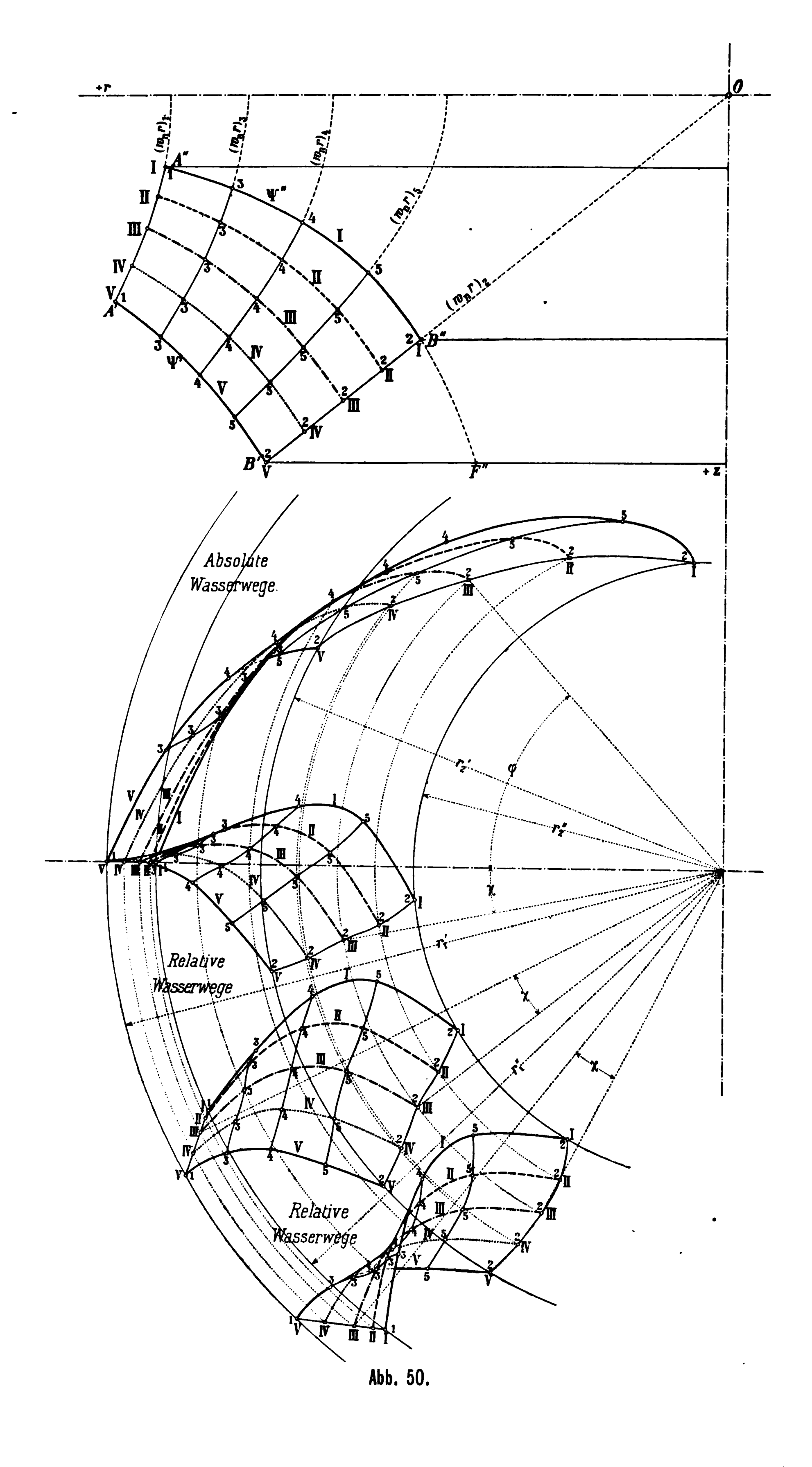

Absolute
Wasserwege
Relative
Wasserwege
Relative
Wasserwege

Abb. 50.

$$\left.\begin{aligned} q_z - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + g &= \frac{d\, w_z}{d\, t} \\ q_r - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{w_n^2}{r} &= \frac{d\, w_r}{d\, t} \\ q_n\, r &= \frac{d\, w_n\, r}{d\, t} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 12).$$

Prof. Lorenz geht bei seiner Theorie von diesen Gleichungen aus. Mit Hilfe derselben und aus den weiteren Entwicklungen erhält man für die Komponenten der Zwangsbeschleunigung:[46])

$$\left.\begin{aligned} q_z &= -w_r \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r}\right) - \left(\frac{w_n}{r} - \omega\right) \cdot \frac{\partial (w_n\, r)}{\partial z} \\ q_r &= w_z \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r}\right) - \left(\frac{w_n}{r} - \omega\right) \cdot \frac{\partial (w_n\, r)}{\partial r} \\ q_n r &= w_r \cdot \frac{\partial (w_n\, r)}{\partial r} + w_z \cdot \frac{\partial (w_n\, r)}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad 13).$$

Weiter ergibt sich als Bedingung dafür, daß eine zusammenhängende Schaufelfläche möglich ist, auf welcher die Zwangsbeschleunigung senkrecht steht, die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q_z}{q_n\, r}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q_r}{q_n\, r}\right) \quad [47]) \quad . \; . \; . \; 14).$$

Aus dieser Flächenbedingung ist deutlich zu erkennen, daß eine willkürliche und unabhängige Wahl der beiden Funktionen

$$w_n\, r = f\,(r, z) \text{ und } \Psi = F\,(r, z)$$

nicht zulässig ist, denn die Komponenten der Zwangsbeschleunigung sind, wie aus den Gleichungen 13) ersichtlich ist, abhängig von den Geschwindigkeitskomponenten, die ihrerseits abhängen von den beiden Funktionen [Gleichungen 8) und 9), S. 117], welche derart beschaffen sein müssen, daß Gleichung 14) erfüllt wird. Die Flächenbedingung müßte auch für Stromfäden erfüllt sein, wenn wir diese durch je zwei Stromflächen und zwei Schaufelflächen begrenzen würden. Daher wurde früher der Querschnitt des Stromfadens kreisförmig angenommen.

Zur Bedingung der Wirbelfreiheit (Gl. 10, S. 117) tritt somit die noch weitergehende Flächenbedingung

---

[46]) Bauersfeld, „Z. d. V. deutscher Ing.", 1905, Nr. 49, S. 2007.

[47]) Bauersfeld, „Z. d. V. deutscher Ing.", 1905, Nr. 49, S. 2008.

(Gl. 14), die Wahl der beiden Funktionen einschränkend, hinzu.

Aus den weiteren Untersuchungen von Prof. Lorenz[48]) folgt, daß wenn $d\,\varphi$ und $d\,\chi$ vollständige Differentiale sein sollen, $w_n\,r$ bloß eine Funktion von r sein kann, was durch die Gleichung

$$w_n\,r = f_2\,(r) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

ausgedrückt wird.

Die Energieniveauflächen sind somit konzentrische Kreiszylinder, deren geometrische Achse mit der Turbinenachse zusammenfällt.

Damit folgt aber für die Winkel φ und χ der absoluten und relativen Wasserbahn, daß sie ebenfalls nur Funktionen von r sein können. Dieses Ergebnis im Verein mit der Flächenbedingung (Gl. 14) führt auf zylindrische Schaufelflächen, deren Erzeugende parallel zur Achse sind.

Ferner ergeben die weiteren Entwicklungen, daß die Gleichung der Stromflächenmeridiane

$$\Psi = F\,(r, z)$$

nur linear nach z und quadratisch nach r sein kann, welcher Forderung auch die einfache Form

$$\Psi = a\,r^2\,z \quad \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

entspricht. Als einfachste Form für die Meridiane der Energieniveauflächen ergibt sich

$$w_n\,r = b\,r - c \quad \ldots \ldots \quad 17).$$

Aus den Gleichungen 8) und 9) (S. 117), 16) und 17) folgen jetzt die Geschwindigkeitskomponenten:

$$w_r = -\,a r, \; w_z = +\,2\,a\,z \quad \ldots \quad 18),$$

$$w_n = \frac{1}{r}\,.\,(b\,r - c) \quad \ldots \ldots \quad 19).$$

Mit diesen Werten rechnet sich für jeden Parallelkreis die absolute Geschwindigkeit aus:

$$w^2 = w_r^2 + w_z^2 + w_n^2.$$

Der Grundriß des relativen Wasserweges ergibt sich aus [Gl. 11) (S. 119), 16) und 17)]:

$$\chi = \underbrace{\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) - \frac{c}{2\,a}\cdot\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)}_{\varphi \text{ (absoluter Wasserweg)}} + \frac{\omega}{a}\,\text{logn.}\,\frac{r}{r_1} \quad 20),$$

in welcher Gleichung die zylindrische Schaufelform zum Ausdruck kommt.

---

[48]) „Z. f. d. gesamte Turbinenwesen", 1906, Heft 7.

Bezeichnungen.

Es bedeutet:

w die absolute Geschwindigkeit,
w_r, w_z und w_n deren Radial-, Achsial- und Umfangskomponente,
p den Druck in kg/m^2,

$h = \frac{p}{\gamma}$ die absolute Druckhöhe in m-Wassersäule,

$h_a = 10\,m$ die Druckhöhe der Atmosphäre;
H, mit den entsprechenden Zeigern, wurde für die Höhenmaße in m gewählt;
H ohne Zeiger ist das Gefälle in m,
Q ist die Sekundenwassermenge in m^3/Sek.,
$\gamma = 1000\,kg/m^3$ das spezifische Gewicht des Wassers,
η der hydraulische Wirkungsgrad.
1 kennzeichnet den Eintrittsquerschnitt,
2 den Austrittsquerschnitt des Laufrades.

Beispiel.

Zugrundegelegt wird die von Prof. Lorenz berechnete Turbine.[49]) Das Laufrad hat unendlich viele, unendlich dünne zylindrische Schaufeln mit Erzeugenden parallel zur Achse. Die Energieniveauflächen sind Kreiszylinder, deren Meridiane gegeben sind durch

$$w_n r = b r - c \quad \ldots \quad 17);$$

die Stromflächenmeridiane haben die Gleichung

$$\Psi = a r^2 z \quad \ldots \quad 16).$$

Aus beiden folgt

$$w_r = -a r, \quad w_z = 2 a z \quad \ldots \quad 18)$$

und

$$w_n = b - \frac{c}{r} \quad \ldots \quad 19).$$

(Seite 123)

Gegeben: $Q = 0{\cdot}6\ m^3$/Sek.,
$H = 5{\cdot}0\ m$,
$n = 150$ Uml./Min.

Angenommen:

$\eta = 0{\cdot}85$,
$w_{n2} = 0$, d. h. $w_2 \perp u_2$.

Es berechnet sich:
die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 15{\cdot}7\ \text{Sek.}^{-1},$$

[49]) „Z. f. d. gesamte Turbinenwesen" 1906, Heft 7, S. 109.

die hydraulische Leistung:

$$N = \eta \cdot \frac{Q \cdot \gamma H}{75} = 34{\cdot}0 \ PS,$$

das übertragene Moment:

$$-M = \eta \cdot \frac{Q \gamma H}{\omega} = 162{\cdot}4 \ mkg.^{50)}$$

Wegen

$$w_{n2} = 0 \text{ ist } -M = \frac{Q \gamma}{g} \cdot (w_n r)_1,$$

woraus folgt:

$$(w_n r)_1 = 2{\cdot}655 \ m^2/\text{Sek.}$$

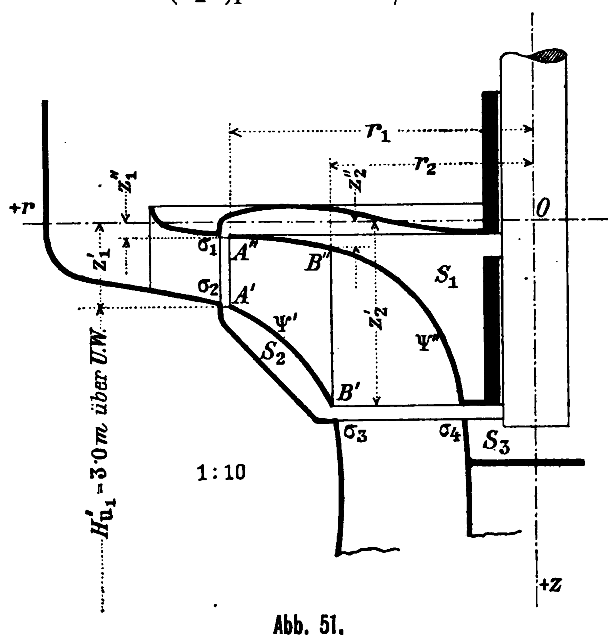


Abb. 51.

Wählt man für die Eintrittsfläche $A' A''$,

$$r_1 = 0{\cdot}4 \ m$$

und

$$w_{r_1} = 2{\cdot}5 \ m/\text{Sek.},$$

so wird

$$w_{n_1} = 6{\cdot}64 \ m/\text{Sek.}$$

und aus

$$w_{r_1} = -a \, r_1$$

$$a = 6{\cdot}25 \ \text{Sek.}^{-1}$$

50) Bezüglich des negativen Zeichens vgl. Fußnote 39) auf S. 115.

Da w_{r1} in der ganzen Eintrittsfläche unveränderlich ist, so erhält man für die Höhe derselben aus

$$Q = 2\, r_1\, \pi \,.\, (z_1' - z_1'')$$
$$z_1' - z_1'' = 0{\cdot}0955 \;m.$$

Wählt man

so folgt
$$\left.\begin{aligned} z_1'' &= 0{\cdot}0145 \;m \ldots A'', \\ z_1' &= 0{\cdot}11 \;m \ldots\ldots A', \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{zu beiden}\\ \text{gehört}\\ r_1 = 0{\cdot}4 \;m.\end{array}$$

Mit den beiden Werten z_1'' und z_1' ergeben sich

$$\Psi' = a\, r_1^2\, z_1' = 0{\cdot}11 \quad \text{für den Kranz}$$
$$\Psi'' = a\, r_1^2\, z_1'' = 0{\cdot}0145 \text{ für den Boden.}$$

Wählt man weiter für B':

$$w_{z_2}' = 3{\cdot}0 \;m/\text{Sek.},$$

so ist wegen

$$\left.\begin{aligned} w_{z_2}' &= 2\, a\, z_2', \quad z_2' = 0{\cdot}24 \;m \\ \Psi' &= a\, r_2^2\, z, \quad r_2 = 0{\cdot}27 \;m \end{aligned}\right\} B'.$$

und damit aus

Die Ordinate von B'' folgt aus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Psi''}{\Psi'} = \frac{a\, r_2^2\, z_2''}{a\, r_2^2\, z_2'} \quad \text{mit } z_2'' &= 0{\cdot}032 \;m, \\ \text{dazu gehört } r_2 &= 0{\cdot}270 \;m \end{aligned}\right\} B''.$$

Damit sind die vier Eckpunkte des Laufraddurchschnittes festgelegt.

Bestimmt man noch zur bequemeren Konstruktion den Halbmesser r_0 des Parallelkreises F'', so erhält man diesen aus

$$Q = (r_2^2 - r_0^2) \,.\, \pi \,.\, w_{z_2}';$$

mit

$$r_2 = 0{\cdot}27 \;m$$
$$w_{z_2}' = 3{\cdot}0 \;m/\text{Sek.}$$
$$Q = 0{\cdot}6 \;m^3/\text{Sek.}$$

wird

$$r_0 = 0{\cdot}097 \;m.$$

Dazu gehört die Ordinate

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= 0{\cdot}097 \;m. \\ z_2' &= 0{\cdot}24 \;m. \end{aligned}\right\} F''.$$

Nach den auf S. 146 angegebenen Verfahren können nunmehr die Laufradbegrenzungen Ψ' und Ψ'' (Kranz und Boden) konstruiert werden. Der Laufraddurchschnitt ist in Abb. 51 (S. 125) dargestellt.

Es erübrigt noch die Bestimmung der Konstanten b und c in

$$w_u r = b r - c.$$

Für die Eintrittsfläche gilt:

$$(w_u r)_1 = b r_1 - c,$$

für die Austrittsfläche, wegen $w_{u2} = 0$:

$$0 = b r_2 - c.$$

Aus beiden Gleichungen folgen mit

$$r_1 = 0{\cdot}4 \; m, \quad r_2 = 0{\cdot}27 \; m \quad \text{und} \quad (w_u r)_1 = 2{\cdot}655:$$

$$b = 20{\cdot}4 \quad \text{und} \quad c = 5{\cdot}51.$$

B. Die Druckverhältnisse im Laufrade.

Der Einbau erfolge nach Abb. 51 (S. 125). Der Parallelkreis A' liege

$$H_{u_1}' = 3{\cdot}0 \; m \text{ über } U. \; W.$$

Die hydraulischen Widerstände werden derart berücksichtigt, daß mit einem Gefälle

$$H_w = \eta \,.\, H = 0{\cdot}85 \,.\, 5 = 4{\cdot}25 \; m$$

so gerechnet wird, als ob die Wasserbewegung verlustfrei vor sich gehe.[51])

w_0 und w_u, die Geschwindigkeiten im $O. W.$ und $U. W.$ an der Turbine, sollen gleich angenommen werden.

1. Druckverteilung längs der Stromfläche Ψ'.

Die Energiegleichung für den beliebigen Parallelkreis A der Eintrittsfläche des Laufrades lautet (Abb. 55, S. 150, statt H ist H_w zu denken):

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2g} = h_a + \frac{w_0^2}{2g} + H_{01}.$$

Mit

$$H_{01} = H_w - H_{u_1}$$

folgt

$$h_1 = \frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_{u_1}) + H_w - \frac{w_1^2}{2g} \quad . \quad . \quad \text{I});$$

---

[51]) Herrmann, „Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen“, 1900, S. 47 u. 149.

$$\left.\begin{aligned} w_1^2 &= w_{r_1}^2 + w_{z_1}^2 + w_{n_1}^2 \\ w_{r_1} = -a\,r_1,\ w_{z_1} &= 2\,a\,z_1,\ w_{n_1} = b - \frac{c}{r_1} \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{I}a).$$

Angewendet auf den **P a r a l l e l k r e i s** A' erhält man

$$h_1' = \frac{w_0^2}{2\,g} + (h_a - H_{u_1}') + H_w - \frac{w_1'^2}{2\,g}.$$

Die absoluten Druckhöhen werden über den zugehörigen Parallelkreisen aufgetragen. Legt man die Ebene OO in der Entfernung von $h_a = 10\,m$ über dem $U.\,W.$, so erhält man zwischen dem Parallelkreise und OO den Teil $(h_a - H_u)$, welcher in allen Druckhöhen vorkommt. [Gleichungen I (S. 127), II) und III) (S. 129)].

Bei der Bildung der Druckdifferenzen braucht man nur jene Teile im Maßstabe, welche zwischen den Laufradbegrenzungen, und jene, welche über oder unter OO liegen, das sind immer die absoluten Druckhöhen, vermindert um $\frac{w_0^2}{2\,g} + (h_a - H_u)$. Wir hätten also für A' bloß zu berechnen

$$H_w - \frac{w_1'^2}{2\,g}.$$

$$A' \begin{cases} r_1 = 0{\cdot}4\,m, \\ z_1' = 0{\cdot}11\,m, \end{cases} \qquad \begin{aligned} w_{r_1} &= -\,2{\cdot}5\,m/\text{Sek.}, \\ w_{z_1}' &= -\,1{\cdot}375\,m/\text{Sek.}, \\ w_{n_1} &= -\,6{\cdot}625\,m/\text{Sek.}, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{w_1'^2}{2\,g} &= 2{\cdot}656\,m \\ H_w &= 4{\cdot}25\,m \end{aligned}\right\} H_w - \frac{w_1'^2}{2\,g} = +\,1{\cdot}594\,m,$$

welche Höhe in der Senkrechten durch A' über OO aufgetragen wird und den **P u n k t** A_σ liefert (Abb. 53, Tafel VI).

Für irgend einen **P a r a l l e l k r e i s** P auf der beliebigen Stromfläche Ψ, **i n n e r h a l b d e s s c h a u f e l b e s e t z t e n T e i l e s d e s L a u f r a d e s** lautet die Energiegleichung (Abb. 55, S. 150, statt H ist H_w zu denken):

$$h + \frac{w^2}{2\,g} = h_1 + \frac{w_1^2}{2\,g} + (z - z_1) - \frac{\omega}{g} \cdot \Big[(w_n\,r)_1 - (w_n\,r)\Big];$$

$\frac{\omega}{g} \cdot \Big[(w_n\,r)_1 - (w_n\,r)\Big]$ ist die zwischen der Eintrittsfläche und der Energieniveaufläche (Kreiszylinder) mit dem Halbmesser r an das Rad abgegebene Leistung von 1 kg Wasser.

Wegen

$$w_{n\,2} = 0$$

ist

$$\frac{\omega}{g} \cdot (w_n\,r)_1 = \eta\,.\,H = H_w.$$

Mit Gleichung I) (S. 127) verbunden, erhält man aus der letzten Energiegleichung die absolute Druckhöhe in P:

$$h = \frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_u) + \frac{\omega}{g}(w_u r) - \frac{w^2}{2g} \quad . \quad . \quad \text{II}).$$

Auf den Parallelkreis D' angewendet, ist wieder nur

$$\frac{\omega}{g}(w_u r) - \frac{w'^2}{2g}$$

zu berechnen:

$$D' \begin{cases} r = 0{\cdot}335\,m, & w_r = -\,2{\cdot}094\,m/\text{Sek.}, \\ z' = 0{\cdot}157\,m, & w_z' = 1{\cdot}964\,m/\text{Sek.}, \\ & w_u = 3{\cdot}962\,m/\text{Sek.}, \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{w'^2}{2g} &= 1{\cdot}220\,m \\ \frac{\omega}{g}\,.\,(w_u r) &= 2{\cdot}125 \end{aligned}\right\} \frac{\omega}{g}\,.\,(w_u r) - \frac{w'^2}{2g} = +\ 0{\cdot}905\,m,$$

welche Höhe in der Senkrechten durch D' über OO aufgetragen wird und den Punkt D_Δ' liefert (Abb. 53, Tafel VI).

$r = 0{\cdot}335\,m$ entspricht der Energieniveaufläche

$$(w_u r) = \frac{1}{2}\,.\,(w_u r)_1 = 1{\cdot}328.$$

Es ist also bis zum Zylinder $D'\,D''$ die halbe Leistung an das Rad abgegeben worden.

Für den beliebigen Parallelkreis B in der Austrittsfläche des Laufrades (Abb. 55, S. 150) lautet die Energiegleichung:

$$h_2 + \frac{w_2^2}{2g} = h_1 + \frac{w_1^2}{2g} + H_k - H_w.$$

H_w ist die hydraulische Leistung von 1 kg Wasser.

Verbunden mit Gleichung I) (S. 127) erhält man für die absolute Druckhöhe in B:

$$h_2 = \frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_{u2}) - \frac{w_2^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III})$$

Auf den Parallelkreis B' angewendet ist nur

$$-\ \frac{w_2'^2}{2g}$$

zu berechnen.

$$B' \begin{cases} r_2 = 0{\cdot}27\,m, & w_{r_2} = -\,1{\cdot}688\,m/\text{Sek.}, \\ z_2' = 0{\cdot}24\,m, & w_{z'_2} = 3{\cdot}0\,m/\text{Sek.}, \\ & w_{u_2} = 0; \end{cases}$$

$$-\frac{w_2'^2}{2g} = -\ 0{\cdot}604\,m$$

ist in der Senkrechten durch B' unter OO aufzutragen, um den Punkt B_s' zu erhalten (Abb. 53, Tafel VI).

$A_\sigma' D_\Delta' B_s'$ gibt die Druckverteilung längs Ψ'.

2. Druckverteilung längs der Stromfläche Ψ'' zwischen A'' und B''.

Gleichung I) (S. 127) gibt für den Parallelkreis A'':

$$h_1'' = \frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_{u1}'') + H_w - \frac{w_1''^2}{2g}.$$

Zu rechnen ist

$$H_w - \frac{w_1''^2}{2g}.$$

$$A'' \begin{cases} r_1 = 0{\cdot}4\,m, & w_{r1} = -\,2{\cdot}5\,m/\text{Sek.}, \\ z_1'' = 0{\cdot}0145\,m, & w_{z1}'' = 0{\cdot}181\,m/\text{Sek.}, \\ & w_{n1} = 6{\cdot}625\,m/\text{Sek.}; \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{w_1''^2}{2g} = 2{\cdot}560\,m \\ H_w = 4{\cdot}25\,m \end{array}\right\} H_w - \frac{w_1''^2}{2g} = +\,1{\cdot}69\,m,$$

welche Höhe zum Punkte A_s'' führt (Abb. 53, Tafel VI).

Gleichung II) (S. 129) gibt für den Parallelkreis D'':

$$h'' = \frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_u'') + \frac{\omega}{g}(w_n\,r) - \frac{w''^2}{2g}.$$

Zu rechnen ist

$$\frac{\omega}{g}(w_n\,r) - \frac{w''^2}{2g}.$$

$$D'' \begin{cases} r = 0{\cdot}335\,m, & w_r = -\,2{\cdot}094\,m/\text{Sek.}, \\ z'' = 0{\cdot}020\,m, & w_z'' = 0{\cdot}253\,m/\text{Sek.}, \\ & w_n = 3{\cdot}962\,m/\text{Sek.}; \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{w''^2}{2g} = 1{\cdot}027\,m \\ \dfrac{\omega}{g}(w_n\,r) = 2{\cdot}125 \end{array}\right\} \frac{\omega}{g}(w_n r) - \frac{w''^2}{2g} = 1{\cdot}098\,m,$$

welche Höhe zum Punkte D_Δ'' führt (Abb. 53, Tafel VI).

Gleichung III) (S. 129) gibt für den Parallelkreis B'':

$$h_2'' = \frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_u''_2) - \frac{w_2''^2}{2g}.$$

Zu rechnen ist

$$-\frac{w_2''^2}{2g}.$$

$$B''\begin{cases} r_2 = 0{\cdot}27\ m, & w_{r2} = -\ 1{\cdot}688\ m/\text{Sek.}, \\ z''_2 = 0{\cdot}032\ m, & w_z''_2 = 0{\cdot}4\ m/\text{Sek.}, \\ & w_{n2} = 0; \end{cases}$$

$$-\frac{w_2''^2}{2g} = -\ 0{\cdot}154\ m,$$

welche Höhe zum Punkte B_s'' führt (Abb. 53, Tafel VI).

$A_s''\ D_\Delta''\ B_s''$ gibt die Druckverteilung längs Ψ'' zwischen A'' und B''.

3. Druckverteilung längs der Stromfläche Ψ'' zwischen B'' und F''.

Für irgend einen Parallelkreis K zwischen B'' und F'' (Abb. 55, S. 150) lautet die Energiegleichung:

$$h'' + \frac{w''^2}{2g} = h_2'' + \frac{w_2''^2}{2g} + (z'' - z_2'').$$

Verbunden mit Gleichung III) (S. 129) folgt die absolute Druckhöhe im Parallelkreise K:

$$h'' = \frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_u'') - \frac{w''^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV}).$$

Angewendet auf den Parallelkreis F'' erhält man für $-\frac{w''^2}{2g}$:

$$F''\begin{cases} r = 0{\cdot}097\ m, & w_r'' = -\ 0{\cdot}606\ m/\text{Sek.}, \\ z_2' = 0{\cdot}24\ m, & w_{z_2}' = 3{\cdot}0\ m/\text{Sek.}, \end{cases}$$

$$-\frac{w''^2}{2g} = -\ 0{\cdot}478\ m,$$

welche Höhe zum Punkte F_s'' führt (Abb. 53, Tafel VI).

Außer für F'' wurden noch für Zwischenpunkte auf $B''\ F''$ die $\frac{w''^2}{2g}$ ermittelt und in die Abb. 53 (Tafel VI) eingetragen, wodurch die Druckverteilungskurve $B_s''\ F_s''$ längs der Fortsetzung von Ψ'' erhalten wurde.

C. Der Druck auf den Spurzapfen.

Unter dem hydrodynamischen Teile sei jener verstanden, welcher von der besonderen Art der Wasserbewegung in dem mit Schaufeln besetzten Teile des Laufrades herrührt. Der hydrostatische Teil ergibt sich aus den Druckdifferenzen in den äußeren Laufradbegrenzungen und aus dem Druckunterschiede am Laufradboden. Der letztere wurde in den hydrostatischen Teil einbezogen, obwohl auf der dem Saugrohr zugekehrten Seite hydraulische Druckhöhen aufzutragen sind.

a. Der hydrodynamische Teil des Zapfendruckes.

Multipliziert man die erste der hydrodynamischen Grundgleichungen 12) (S. 122)

$$q_z - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + g = \frac{d\,w_z}{d\,t}$$

mit der Masse des Raumelementes Abb. 48 (S. 116)

$$d\,m = \frac{\gamma}{g} \cdot 2\,r\,\pi \,.\, d\,r \,.\, d\,z,$$

welches wegen der kongruenten Anordnung im Kreise um die Turbinenachse zugrundegelegt werden kann, so erhält man bei gleichzeitiger Integration

$$\int q_z . dm - \int\int \frac{\partial p}{\partial z} . d\,z . 2\,r\,\pi\,d\,r = \int \frac{d\,w_z}{d\,t} . d\,m - \int g\,d\,m.$$

$$\int \frac{\partial p}{\partial z} . d\,z = \Delta\,p_r$$

ist nichts anderes als die hydraulische Druckdifferenz zwischen kongruenten Parallelkreisen in den inneren Laufradbegrenzungen (z. B. zwischen den beiden Kreisen D' und D'' Abb. 53, Tafel VI).

Damit schreibt sich die Gleichung

$$\int q_z . d\,m - \int \Delta\,p_r . 2\,r\,\pi . d\,r = \int \frac{d\,w_z}{d\,t} . d\,m - \int g . d\,m;$$

die Integrationen sind über den mit Schaufeln besetzten Teil des Laufrades auszudehnen.

Bei der Aufstellung der hydrodynamischen Grundgleichungen wird von der Einwirkung der Kräfte auf das Wasser ausgegangen; in diesem Sinne ist daher auch die zuletzt aufgestellte Gleichung zu deuten. Ändert man in dieser die Vorzeichen

$$\left.\begin{array}{l} -\int q_z \, . \, dm + \int \Delta p_r \, . \, 2 r \pi \, . \, dr = \\ = -\int \frac{d w_z}{dt} \, . \, dm + \int g \, . \, dm \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 21),$$

so erhält man links wie rechts die gesamte achsiale Einwirkung des unter Energieabgabe strömenden Wassers auf den mit Schaufeln besetzten Teil des Laufrades.

$R_z = -\int \frac{d w_z}{dt} \, . \, dm$ ist die achsiale Reaktion,

$G = \int g \, . \, dm$ das Gewicht des Wassers im Laufrade.

Die linke Seite der Gleichung gibt uns an, aus welchen Teilen sich die Reaktion zusammensetzt, die nichts anderes ist als die Summe aller, aus der besonderen Wasserbewegung entspringenden, auf das Laufrad ausgeübten Drücke.

Zunächst ist der erste Ausdruck links der Druck, mit welchem das Wasser den Zwangsdruck der Schaufeln (S. 120) erwidert.

Es kann daher

$$Z_q = -\int q_z \, . \, dm$$

als achsialer Schaufeldruck bezeichnet werden.

Was den zweiten Teil der linken Seite der Gleichung 21) anbelangt, so rührt dieser her von der Differenz der hydraulischen Drücke, welche einerseits der Laufradboden $A'' B''$ (Abb. 52 u. 53, Tafel VI), andererseits der Kranz $A' B'$ erfährt.

Der Druck auf $A' B'$ ist gegeben durch

$$+ \gamma \, . \, (\text{Vol.}\, A_\sigma' \, B_\sigma' \, B' \, A' \, A_\sigma'),$$

der Druck auf $A'' B''$ durch

$$- \gamma \, . \, (\text{Vol.}\, A_s'' \, B_s'' \, B'' \, A'' \, A_s'').$$

Die Differenz aus beiden gibt zwei Druckkörper:

Unten positiv:

$$G = + \gamma \, . \int_{r_2}^{r_1} \delta z \, . \, 2 r \pi \, . \, dr$$

gleich dem Gewichte des Wassers im Laufrade;

oben negativ:

$$P_\Delta = - \gamma \, . \int_{r_2}^{r_1} \Delta h \, . \, 2 r \pi \, . \, dr,$$

welcher als achsialer hydraulischer Gesamtdruck bezeichnet werden kann.

Wie aus Abb. 52 (Tafel VI) ersichtlich ist, besteht nämlich die Druckdifferenz für zwei kongruente Parallelkreise, z. B. für D' und D'' aus zwei Teilen:

Unten $+\delta z$ zwischen den inneren Laufradbegrenzungen,
oben $-\Delta h$ zwischen den Begrenzungen der beiden Druckkörper.

Es ist somit

$$\int \Delta p_r \,.\, 2 r \pi \,.\, d r = G + P_\Delta$$

und die Gleichung 21 (S. 133) erhält die Form

$$Z_q + G + P_\Delta = R_z + G,$$

woraus folgt:

$$R_z = Z_q + P_\Delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 22).$$

Die achsiale Reaktion setzt sich somit aus dem durch die Schaufeln übertragenen achsialen Schaufeldrucke und aus dem achsialen hydraulischen Gesamtdrucke zusammen, welch letzterer vom Boden und Kranz des Laufrades auf den Zapfen übertragen wird.

Bei der gewöhnlichen Anordnung, bei welcher Kranz, Boden und Schaufeln ein Ganzes bilden, ist R_z der hydrodynamische Teil des Zapfendruckes.

Wären die Schaufeln für sich mit der Welle verbunden, so wäre Z_q der hydrodynamische Teil des Spurdruckes, weil in diesem Falle Kranz und Boden Teile des Gehäuses bilden, welche als solche mit der Welle nicht verbunden sind.

Wenden wir die allgemeinen Beziehungen auf unsere Turbine an, so ist hier wegen der zylindrischen Schaufeln

$$q_z = 0$$ [52]

und damit auch

$$Z_q = 0.$$

Es wird jetzt

$$R_z = P_\Delta.$$

Das Rad, bei welchem Boden, Kranz und Schaufeln ein Ganzes bilden, erfährt somit keinen achsialen Schaufeldruck und der hydrodynamische Teil des Zapfendruckes, die achsiale Reaktion, ist gleich dem achsialen hydraulischen Gesamtdrucke. Die Gleichung 22) geht somit über in

$$R_z = P_\Delta.$$

---

[52]) Folgt auch aus der ersten der Gleichungen 13) (S. 122) weil, wegen

$$w_r = -a r, \quad w_z = 2 a z, \quad w_n r = b r - c,$$

folgt

$$\frac{\partial w_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial (w_n r)}{\partial z} = 0.$$

Wären die Schaufeln für sich allein mit der Welle verbunden, so wäre der hydrodynamische Teil des Zapfendruckes gleich Null, da der von Kranz und Boden aufzunehmende hydraulische Gesamtdruck auf das Gehäuse und nicht auf den Zapfen übertragen wird.

Dazu kommt noch das Gewicht G des Wassers im Laufrade (Gleichung 21, S. 133), welches bei der Bildung des hydrostatischen Teiles berücksichtigt wird und dort aus der Rechnung fällt.

1. Die achsiale Reaktion R_z.

Es handelt sich um die Berechnung der Größe

$$R_z = -\int \frac{d\,w_z}{d\,t} \cdot d\,m.$$

Die Werte der Stromfläche Ψ' (Kranz) sind durch $'$, die der Stromfläche Ψ'' (Boden) durch $''$ gekennzeichnet.

Die achsiale Beschleunigung ist gegeben durch

$$\frac{d\,w_z}{d\,t} = w_z \frac{\partial\,w_z}{\partial\,z} + w_r \cdot \frac{\partial\,w_z}{\partial\,r} \cdot \text{[58]})$$

$$w_z = 2\,a\,z; \quad \frac{\partial\,w_z}{\partial\,z} = 2\,a \text{ und } \frac{\partial\,w_z}{\partial\,r} = 0;$$

daher

$$\frac{d\,w_z}{d\,t} = w_z \cdot 2\,a = 4\,a^2\,z.$$

$$d\,m = \frac{\gamma}{g} \cdot 2\,r\,\pi \cdot d\,r \cdot d\,z,$$

$$R_z = -\frac{\gamma}{g} \cdot 4\,a^2 \cdot \int\!\!\int z \cdot d\,z \cdot 2\,r\,\pi \cdot d\,r$$

$$= -\gamma\,\frac{2a^2}{g} \cdot \int (z'^2 - z''^2)\,2\,r\,\pi \cdot d\,r \; kg.$$

Mit $w_z = 2\,a\,z$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{R_z} = -\gamma \int_{r_2}^{r_1} \left(\frac{w_z'^2}{2\,g} - \frac{w_z''^2}{2\,g} \right) \cdot 2\,r\,\pi \cdot d\,r \; kg \qquad 23).$$

Zu setzen ist:

$\gamma = 1000\ kg/m^3$, $g = 9{\cdot}81\ m/\text{Sek.}^2$, $a = 6{\cdot}25\ \text{Sek.}^{-1}$

Die Ermittlung von R_z kann nun graphisch erfolgen (wie gleich an einem Beispiele gezeigt werden soll. Abb. 52, Tafel VI):

---

[58]) „Z. f. d. gesamte Turbinenwesen" 1905, Heft 17, S. 259, Gleichung 10*a*.

Nimmt man: $r = 0{\cdot}335\,m$ an, so kann man z' und z'' aus der Zeichnung entnehmen, nach $w_z = 2\,a\,z$ die achsialen Geschwindigkeitskomponenten rechnen nnd erhält damit die Geschwindigkeitshöhen.

Durch Rechnung erhält man:

$$\Psi' = a\,r^2 z'; \quad w_z' = \frac{2\,\Psi'}{r^2}, \quad w_z'^2 = \frac{4\,\Psi'^2}{r^4} = \frac{4 . 0{\cdot}11^2}{0{\cdot}335^4} = 3{\cdot}861$$

$$\Psi'' = a r^2 z''; \quad w_z'' = \frac{2\,\Psi''}{r^2}, \quad w_z''^2 = \frac{4\,\Psi''^2}{r^4} = \frac{4 . 0{\cdot}0145^2}{0{\cdot}335^4} = 0{\cdot}064$$

$$\overline{D_\Delta''\,D_\Delta'} = \frac{1}{2\,g}\,(w_z'^2 - w_z''^2) = 0{\cdot}194\ m.$$

Dieser Wert wird in der Entfernung $r = 0{\cdot}335\ m$ von der Achse auf einer Senkrechten von einer beliebigen Wagrechten (Abb. 52, Tafel VI OO) aus aufgetragen.

Ebenso folgt für

$$r_1 = 0{\cdot}4\ m: \quad \overline{A_\Delta''\,A_\Delta'} = 0{\cdot}095\ m$$

und für

$$r_2 = 0{\cdot}27\ m: \quad \overline{B_\Delta''\,B_\Delta'} = 0{\cdot}456\ m.$$

Für mehrere Punkte von r_1 bis r_2 wiederholt, erhält man die Fläche

$$F_\Delta = A_\Delta''\,D_\Delta''\,B_\Delta''\,B_\Delta'\,D_\Delta'\,A_\Delta'\,A_\Delta''.$$

Bestimmt man den Halbmesser r_Δ des Schwerpunktes der Fläche F_Δ, so ist

$$F_\Delta \,.\, 2\,r_\Delta\,\pi = V_\Delta = \int_{r_2}^{r_1} \left(\frac{w_z'^2}{2\,g} - \frac{w_z''^2}{2\,g}\right) .\, 2\,r\,\pi\,d\,r\ \ m^3,$$

und weiter

$$R_z = -\,\gamma \,.\, V_\Delta\ \ kg,$$

gleich dem Gewichte des mit Wasser gefüllten Rotationskörpers mit dem Volumen V_Δ.

Für unsere Turbine folgt aus der Abb. 52 (Tafel VI):

$$\left.\begin{array}{l} F_\Delta = 0{\cdot}0288\ m^2 \\ r_\Delta = 0{\cdot}3174\ m \end{array}\right\} V_\Delta = 0{\cdot}057\ m^3,$$

und daraus

$$R_z = -\,\gamma \,.\, 0{\cdot}057 = -\,57\ kg.$$

Die Reaktion ist negativ, wirkt daher entlastend.

Eine andere Methode zur Ermittlung wurde auf S. 162 entwickelt.

In Abb. 52 (Tafel VI) ist auch diese Methode durchgeführt. Sie liefert den Rotationskörper mit dem Schnitte

$$F_w' = A_I' \, A_I'' \, B_I'' \, B' \, A_I' = 0{\cdot}0431 \; m^2.$$

Der Schwerpunktshalbmesser dieses Schnittes ergibt sich mit

$$r_{\Delta z}' = 0{\cdot}208 \; m;$$

es folgt dann die achsiale Reaktion aus

$$R_z = -\gamma \, . \, F_w' \, . \, 2 \, r_{\Delta z}' \, \pi = -\gamma \, . \, V_w' = -56{\cdot}4 \; kg,$$

welcher Wert mit dem oben gerechneten, als Ergebnis einer graphischen Methode genügend übereinstimmt. Es muß übrigens auch $\frac{F_\Delta}{F_{\Delta z}'} = \frac{r_{\Delta z}'}{r_\Delta}$ sein.

2. Der achsiale hydraulische Gesamtdruck P_Δ.

Für die Ermittlung des Zapfendruckes ist P_Δ nicht erforderlich.

Er braucht bei unserer Turbine aber auch deshalb nicht gerechnet werden, weil

$$R_z = P_\Delta$$

ist.

Zum Zwecke einer erschöpfenden Behandlung soll P_Δ unmittelbar bestimmt werden. Gleichzeitig erhalten wir eine Überprüfung des Wertes für R_z.

Es handelt sich um die Größe

$$\int\!\!\int \frac{\partial p}{\partial z} \, . \, d\, z \, . \, 2 \, r \, \pi \, d\, r = \int \Delta \, p_r \, . \, 2 \, r \, \pi \, d\, r$$

mit

$$\Delta \, p_r = \int \frac{\partial p}{\partial z} \, . \, d\, z.$$

Nun ist allgemein

$$\frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} = g - w_r \frac{\partial w_r}{\partial z} - w_z \, . \, \frac{\partial w_z}{\partial z} - w_n \frac{\partial w_n}{\partial z} + \\ + \omega \, . \, \frac{\partial (w_n \, r)}{\partial z}. \text{ [54]}$$

---

[54]) Bauersfeld, „Z. d. V. deutscher Ingenieure“ 1905, Nr. 49, S. 2007.

Lorenz, „Z. f. d. gesamte Turbinenwesen“ 1906, Heft 7, S. 107.

In unserem Falle ist:

$$w_r = -a\,r, \qquad \text{daher} \quad \frac{\partial w_r}{\partial z} = 0;$$

$$w_z = 2\,a\,z, \qquad \text{daher} \quad \frac{\partial w_z}{\partial z} = 2\,a;$$

$$w_n = \frac{b\,r - c}{r}, \qquad \text{daher} \quad \frac{\partial w_n}{\partial z} = 0;$$

$$w_n r = b\,r - c, \quad \text{daher} \quad \frac{\partial (w_n\,r)}{\partial z} = 0.$$

Es erhält somit die Gleichung die Form

$$\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = g - 2\,a\,.\,w_z,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial p}{\partial z}\,.\,dz = \gamma\,dz - \frac{\gamma}{g}\,.\,2\,a\,.\,w_z\,.\,dz,$$

oder mit $w_z = 2\,a\,z$.

$$\Delta\,p_r = \int \frac{\partial p}{\partial z}\,.\,d\,z = \gamma\,.\int d\,z - \frac{\gamma}{g}\,.\,4\,a^2 \int z\,d\,z$$

$$= \gamma\,(z' - z'') - \gamma\,.\,\frac{2\,a^2}{g}\,.\,(z'^2 - z''^2).$$

Es wird nun

$$\int \Delta\,p_r\,.\,2\,r\,\pi\,.\,d\,r = \gamma\,.\int (z' - z'')\,.\,2\,r\,\pi\,d\,r -$$

$$- \gamma\,\frac{2\,a^2}{g}\,.\int (z'^2 - z''^2)\,.\,2\,r\,\pi\,.\,d\,r.$$

Wie aus Abb. 52 (Tafel VI) zu ersehen, ist der erste Ausdruck rechts das Gewicht G des Wassers im Rade und der zweite ist somit der achsiale hydraulische Gesamtdruck P_Δ, der zweite Druckkörper, von welchem auf S. 133 gesprochen wurde. Es ist daher auch

$$\int_{r_2}^{r_1} \Delta\,p_r\,.\,2\,r\,\pi\,.\,d\,r = G + P_\Delta$$

mit

$$P_\Delta = -\gamma\,.\,\frac{2\,a^2}{g}\,.\int (z'^2 - z''^2)\,.\,2\,r\,\pi\,.\,dr\,.\,kg.$$

Setzt man $2\,a\,z = w_z$, so wird auch

$$P_\Delta = -\gamma\,.\int_{r_2}^{r_1} \left(\frac{w_z'^2}{2\,g} - \frac{w_z''^2}{2\,g}\right).\,2\,r\,\pi\,.\,dr\ kg \qquad . \quad 24).$$



Mit Gleichung 23) (S. 135) für R_z verglichen, ergibt sich tatsächlich

$$P_\Delta = R_z.$$

Nach der auf S. 133 angegebenen Bildung aus den im Abschnitte B (S. 127) ermittelten Druckhöhen ist:

$$P_\Delta = -\gamma \cdot \int_{r_2}^{r_1} \Delta h \cdot 2 r \pi \cdot dr.$$

Es ist somit nach Gleichung 24)

$$\Delta h = \frac{1}{2g} \cdot (w_z'^2 - w_z''^2),$$

während nach der dort angegebenen Bildung (vergl. auch Abb. 52, Tafel VI) folgt:

$$\Delta h = \frac{1}{2g} \cdot (w'^2 - w''^2).$$

Wegen

$$w_n r = b r - c,$$
$$w_r = - a r;$$
$$w_z = 2 az$$

ist für kongruente Parallelkreise

$$w'^2 = w_r^2 + w_n^2 + w_z'^2,$$
$$w''^2 = w_r^2 + w_n^2 + w_z''^2,$$

woraus folgt

$$w'^2 - w''^2 = w_z'^2 - w_z''^2.$$

3. Der achsiale Schaufeldruck Z_q

ist bei unserer Turbine gleich Null.

Nach den Untersuchungen des Abschnittes über den hydrodynamischen Teil des Zapfendruckes sind für die Zusammensetzung des letzteren

$$R_z + G\ kg$$

vorzumerken.

b. Der hydrostatische Teil des Zapfendruckes.

Wie schon früher erwähnt, ist unter dem hydrostatischen Teil des Zapfendruckes die Druckdifferenz in den äußeren Laufradbegrenzungen zu verstehen.

Der Einbau erfolge nach Abb. 51 (S. 125).

1. Die nicht entlastete Turbine.

(Abb. 53, Tafel VI).

Raum S_1: Der Laufradboden reicht bis F'' und enthält keine Entlastungslöcher. Es ist daher für S_1 maß-

gebend der Spaltdruck in σ_1. Ihm entspricht die absolute Druckhöhe $h_1'' = \overline{A'' A_s''}$, von welcher wie früher der über OO liegende Teil maßstabrichtig aufgetragen ist (S. 130).

Wird das Wasser in S_1 vom Laufrade mit der halben Winkelgeschwindigkeit mitgenommen, so sinkt der Druck nach einem Paraboloide, dessen Scheitel S_1 um $\frac{1}{4} \cdot \frac{u^2_1}{2g}$ unter der wagrechten Ebene durch A_s'' liegt.

$$u_1 = \frac{n \cdot 2 r_1 \pi}{60} = \frac{150 \cdot 2 \cdot 0{\cdot}4\,\pi}{60} = 2\pi$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{u_1^2}{2g} = 0{\cdot}502\ m.$$

Raum S_2: Dieser ist durch σ_3 gegen den Saugraum offen, der Spaltdruck in A' wird durch Ausflußwiderstände abgedrosselt. Für S_2 ist daher maßgebend die absolute Druckhöhe $h_2' = \overline{B' B'_s}$. Wird das Wasser in S_2 vom Laufrade mit der halben Winkelgeschwindigkeit mitgenommen, so steigt von B_s' der Druck nach einem Paraboloide, welches kongruent ist mit $A_s'' S_1$. Zur Geltung kommt $B_s' A_s'$.

Saugraum: Diesem ist die untere Seite des Bodens $B'' F''$ zugekehrt. Die Druckverteilung $B_s'' F_s''$ längs $B'' F''$ wurde auf S. 131 ermittelt und in Abb. 53 (Tafel VI) aus Abb. 52 (Tafel VI) übertragen.

Raum S_3: Dieser steht durch σ_4 mit dem Saugraume in Verbindung. In σ_4 ist der absolute Druck gemessen durch die Druckhöhe $\overline{F'' F_s''}$. Von F_s'' sinkt der Druck nach dem Paraboloide $F_s'' J_s S_3$, welches kongruent ist mit $A_s'' S_1$, wenn angenommen wird, daß auch in S_3 das Wasser mit der halben Winkelgeschwindigkeit des Laufrades rotiert.

Hydrostatischer Druckkörper. Nimmt man das Gewicht G des Wassers im Laufrade (S. 135) hinzu, so wirkt nach abwärts:

$$\gamma \cdot (\text{Vol. } A_s A_s'' A' B' B'' F'' J A_s).$$

Nach aufwärts wirkt:

$$\gamma \cdot (\text{Vol. } J_s F_s'' B_s'' B_s' A_s' A' B' B'' F'' J J_s).$$

Es bleibt somit belastend das Gewicht des Wasserrotationskörpers mit dem Schnitte:

$$F_{s_1} = A_s A_s'' A_s' B_s' B_s'' F_s'' J_s A_s,$$

welcher in Abb. 53 (Tafel VI) rechts ansteigend schraffiert ist.

Bezeichnet man den Halbmesser des Schwerpunktes dieser Fläche mit r_{s_1}, so ist das Volumen des Druckkörpers

$$V_{s_1} = F_{s_1} \,.\, 2\, r_{s_1} \pi,$$

und der hydrostatische Teil des Zapfendruckes:

$$P_{s_1} = + \gamma \,.\, V_{s_1} = + \gamma \int_{r_w}^{r_1} \Delta h_{s_1} \,.\, 2\, r\, \pi \,.\, dr \quad kg.$$

Das Gewicht G des Wassers im Rade wurde durch seinen Auftrieb aufgehoben.

P_{s_1} entspricht der Summe $P_1^{(1)} + P_2^{(2)}$ (S. 16 und S. 51).

Trägt man über $A_s' B_s'$ (Abb. 53, Tafel VI) $F_\Delta = A_\Delta'' B_\Delta'' B_\Delta' A_\Delta' A_\Delta''$ (Abb. 52, Tafel VI) an, welche Fläche der Reaktion R_z zugehört, so erhält man in:

$$P_{s_1} + R_z = + \gamma \,.\, (\text{Vol. } A_s A_s'' A_\Delta'' B_s'' F_s'' J_s A_s)\ kg,$$

die Summe aus dem hydrodynamischen und aus dem hydrostatischen Teile des Zapfendruckes, welche Summe somit unter einem gebildet werden kann.

2. Größte Entlastung.

(Abb. 53, Tafel VI).

Um die größte Entlastung zu erreichen, ist in S_1 der kleinste, in S_2 der größte Druck anzustreben.

Raum S_1: Der Raum S_1 wird im Durchmesser $2\, r_1$ durch Umführungsleitungen mit dem *U. W.* verbunden (S. 45), der Spaltdruck in σ_1 wird abgedrosselt.

Es ist somit für S_1 maßgebend die absolute Druckhöhe $\overline{A_\sigma'' A''}$.

Auf der dem Raume S_1 zugekehrten Seite erhält das Laufrad Rippen (S. 48), die Winkelgeschwindigkeit des Wassers in S_1 ist daher gleich jener des Laufrades und der Druck sinkt von A_σ'' nach dem Paraboloide $A_\sigma'' \Sigma_1$ mit der Scheitelhöhe

$$\frac{u_1^2}{2\,g} = 2{\cdot}008\ m.$$

Würde man die Umführungsleitungen nicht ins *U. W.* führen, sondern an das Saugrohr unmittelbar unter B' anschließen, so käme das Paraboloid nach $a_\sigma'' \Sigma_1'$.

Raum S_2: Der Spaltdruck ist in den Raum S_2 hineinzuleiten und durch Ausflußwiderstände in σ_3 zu halten.

Ferner sind in S_2 am Gehäuse Rippen anzuordnen, um das Wasser an der Rotation zu hindern (S. 52). Für S_2 ist jetzt maßgebend die absolute Druckhöhe

$$h_1' = \overline{A_\sigma' A'}.$$

Längs $A' B'$ sind die Druckhöhen durch die Wagrechte $A_\sigma' B_\sigma'$ begrenzt.

Saugraum und Raum S_3: Für diese beiden Räume bleibt die frühere Begrenzung

$$B_s'' \; F_s'' \; J_s.$$

Hydrostatischer Druckkörper. Nimmt man das Gewicht G des Wassers im Laufrade hinzu, so wirkt nach abwärts:

$$\gamma \,.\, (\text{Vol.}\; A_\sigma \, A_\sigma'' \; A' \, B' \, B'' \; F'' \; J \, A_\sigma).$$

Nach aufwärts wirkt:

$$\gamma \,.\, (\text{Vol.}\; J_s \, F_s'' \; B_s'' \; B_\sigma' \, A_\sigma' \; A' \, B' \, B'' \; F'' \; J \, J_s).$$

Es bleibt somit entlastend das Gewicht des Wasserrotationskörpers mit dem Schnitte:

$$F_{s_2} = A_\sigma \, A_\sigma'' \; A_\sigma' \; B_\sigma' \; B_\sigma'' \; F_s'' \; J_s \, A_\sigma,$$

welcher in Abb. 53 (Tafel VI) links ansteigend schraffiert ist.

Bezeichnet man den Halbmesser des Schwerpunktes dieser Fläche mit r_{s_2}, so ist das Volumen des Druckkörpers

$$V_{s_2} = F_{s_2} \,.\, 2 \, r_{s_2} \, \pi$$

und der hydrostatische Teil des Zapfendruckes

$$P_{s_2} = -\gamma \,.\, V_{s_2} = -\gamma \,.\, \int_{r_w}^{r_1} \Delta \, h_{s_2} \,.\, 2 \, r \, \pi \,.\, d \, r \; kg.$$

G ist auch hier aus der Rechnung gefallen.

P_{s_2} entspricht der Summe $P_1^{(6)} + P_2^{(6)}$ (S. 48 u. S. 52).

Trägt man über $A_\sigma' \; B_\sigma'$

$$F_\Delta = A_\Delta'' \; B_\Delta'' \; B_\Delta' \; A_\Delta' \; A_\Delta''$$

(Abb. 52, Tafel VI) an, welche Fläche der Reaktion R_z zugehört, so erhält man in

$$P_{s_2} + R_z = -\gamma \,.\, (\text{Vol.}\; A_\sigma \, A_\sigma'' \; A_s'' \; B_\Delta'' \; B_s'' \; F_s'' \; J_s \, A_\sigma) \; kg,$$

die Summe aus dem hydrodynamischen und aus dem hydrostatischen Teile des Zapfendruckes, welche Summe unter einem gebildet werden kann.

* * *

Es ist nicht ohne Interesse, die Druckverhältnisse weiter zu verfolgen. Da angenommen wurde, daß der Laufradboden bis F'' reicht, so kann auch bei der Bildung der Druckkörper als untere Begrenzung des Laufrades die horizontale Ebene $B' \, F''$ angesehen werden.

Hydrostatischer Druckkörper (Abb. 53, Tafel VI). Ermittelt man die Druckhöhen für $\overline{B' \, F''}$, so erhält man als obere Begrenzung derselben die Kurve $B_s' \, F_s''$, welche

an Stelle des Zuges $B_s' B_s'' F_s''$ in die Begrenzung der Druckkörper tritt.

Dadurch wird bei der nicht entlasteten Turbine die Belastung um das Gewicht des Wasserrotationskörpers mit dem Schnitte

$$F_y = B_s' B_s'' F_s'' B_s'$$

größer, während für den Fall der größten Entlastung die letztere um den gleichen Betrag kleiner wird.

Hydrodynamischer Druckkörper (Abb. 52, Tafel VI).

Dafür ist aber jetzt die Reaktion bis F'' zu nehmen. An Stelle des Druckkörpers

$$A_I' A_I'' B_I'' B' A_I'$$

tritt jetzt

$$A_I' A_I'' F'' B' A_I',$$

welcher um das Gewicht des Wasserrotationskörpers mit dem Schnitte

$$F_x = B' B_I'' F'' B'$$

größer ist.

Diese vermehrte dynamische Entlastung muß gleich sein der Vergrößerung der statischen Belastung; d. h.

$$\gamma \,.\, (\text{Vol.}\, B' B_I'' F'' B')$$

muß gleich sein

$$\gamma \,.\, (\text{Vol.}\, B_s' B_s'' F_s'' B_s'),$$

was die graphische Ausmittlung auch tatsächlich ergibt.

Die Summe aus $R_z + P_s$ ist somit dieselbe wie früher.

Es muß sich auch ergeben

$$\gamma \,.\, (\text{Vol.}\, F_s'' B_s'' A_\Delta'' A_s' B_s' F_s'') = \gamma\, (\text{Vol.}\, A_I' A_I'' F'' B' A_I').$$

(Abb. 53, Tafel VI) (Abb. 52, Tafel VI)

Auf diese Verhältnisse wurde bereits auf S. 24 hingewiesen und deren schärfere Untersuchung in Aussicht gestellt.

Nimmt man die Abb. 52 u. 53 (Tafel VI) als Teile eines Bildes zusammen, so ist links der hydrodynamische Teil des Zapfendruckes, nach drei Methoden entwickelt, rechts der hydrostatische Teil dargestellt. In der rechten Hälfte wurde auch die Summe aus beiden gebildet.

V.

Anhang.

Francis-Turbine.

Bei der folgenden Berechnung einer Francis-Turbine nach der neuen Theorie wurden die Meridiane der Energieniveauflächen

$$(w_n r) = b^2 r^2 - c^2 z^2 \text{ (Hyperbeln)}$$

und die Stromflächenmeridiane

$$\Psi = a r^2 z$$

unabhängig voneinander gewählt.[55])

Wie schon früher erörtert wurde, ist diese willkürliche Wahl nicht statthaft, wenn eine zusammenhängende Schaufelfläche entstehen soll, welche die durch die Wahl der beiden Funktionen beabsichtigte Strömung erzwingt. Von den unendlich vielen Flächen, welche bei der unabhängigen Wahl durch Aneinanderreihung der relativen Wassermenge entstehen können (S. 120), wird eine die geringste Abweichung von der Art der Wasserbewegung ergeben, welche durch die Wahl der beiden Funktionen beabsichtigt wurde. Unter dieser Voraussetzung werden die folgenden Rechnungen, welche nach dem Erscheinen der ersten Arbeiten von Professor Lorenz durchgeführt wurden,[56]) als Annäherung für eine allgemeine Form des Laufraddurchschnittes gebilligt werden können.

Überdies enthalten sie manches Einwandfreie; so die Konstruktion der Kurven $\Psi = a r^2 z$, welche auch bei der richtigen Turbine als Stromflächenmeridiane bleiben, die

---

[55]) Lorenz, „Z. d. V. deutscher Ingenieure" 1905, Nr. 41, S. 1670. Die Arbeiten über die weitere Entwicklung der neuen Theorie sind auf S. 111, Fußnote [36]) angeführt.

[56]) „Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines" 1905, Nr. 49, S. 669.

Methode zur Ermittlung der Reaktion und die Abb. 56 (S. 161), welche ein übersichtliches Bild über die Druckverhältnisse gibt.

Die Berücksichtigung der hydraulischen Verluste nach der üblichen Art tritt als weitere Näherung hinzu.

Beispiel.

Es gelten die auf S. 124 angegebenen Bezeichnungen. Zugrunde gelegt wird die von Prof. Lorenz für dieselben Annahmen wie auf S. 124 berechnete Turbine.[57])

Gegeben: $Q = 0{\cdot}600\ m^3$/Sek. sekundl. Wassermenge,
$H = 5{\cdot}0\ m$ Gefälle,
$n = 150$ Uml./Min.

Angenommen: $\eta = 0{\cdot}85$ hydraulischer Wirkungsgrad.

Meridiane der Stromflächen:

$$\Psi = a\,r^2\,z,$$

daher $w_r = -a\,r$ und $w_z = 2\,a\,z$.

Meridiane der Flächen gleichen Momentes der Bewegungsgrößen oder gleichen Arbeitsvermögens:

$$(w_n\,r) = b^2\,r^2 - c^2\,z^2 \text{ (Hyperbeln).}$$

Wegen $w_{n_2} = 0$ wird der Meridian der Austrittsfläche (Asymptotenkegel)

$$b\,r = c\,z.$$

Das an die Schaufel abgegebene Moment ist wegen $w_{n_2} = 0$

$$-M = \frac{Q\cdot\gamma}{g}\,(w_n\,r)_1\ mkg.$$

Die abgegebene Arbeit ist

$$-M\,.\,\omega = \eta\,L = \eta\,.\,Q\,\gamma\,.\,H\ mkg/\text{Sek.}$$

Für die obigen Angaben wird

$$\omega = 15{\cdot}7\ \text{Sek.}^{-1},$$

$$N = \frac{\eta\,.\,Q\,\gamma\,.\,H}{75} = 34{\cdot}0\ PS. \text{ Hydraulische Leistung.}$$

$$-M = \frac{\eta\,Q\,\gamma\,H}{\omega} = 162{\cdot}4\ mkg,$$

$$(w_n\,r)_1 = -\frac{M\,g}{Q\cdot\gamma} = 2{\cdot}655\ m^2/\text{Sek.}$$

Wählt man nunmehr für A' (Abb. 54, Taf. VII):

$$r_1' = 0{\cdot}400\ m \text{ und } w_{r_1}' = -2{\cdot}5\ m/\text{Sek.},$$

so folgt

$$a = -\frac{w_{r_1}'}{r_1'} = 6{\cdot}25\ \text{Sek.}^{-1}$$

---

[57]) Zeitschrift d. Vereines deutscher Ingenieure 1905, S. 1673, Nr. 41.

und
$$w_{n_1}' = \frac{(w_n\, r)_1}{r_1'} = 6\cdot640\ m/\text{Sek}.$$

Wählt man ferner für B':
$$w_{z_2}' = 3\cdot000\ m/\text{Sek}.,$$
so folgt
$$z_2' = \frac{w_{z_2}'}{2\,a} = 0\cdot240\ m.$$

Ferner rechnet sich aus
$$\pi\,(r_2'^2 - r_0^2)\,.\,w_{z_2}' = Q$$
$$r_2' = 0\cdot3\ m \text{ und } r_0 = 0\cdot163\ m.$$

Mit r_2' und z_2' ist somit Punkt B', mit r_0 und z_2' auch Punkt F'' festgelegt.

Es ergeben sich ferner:
$$\Psi' = a\, r_2'^2\,.\,z_2' = 0\cdot135,$$
$$\Psi'' = a\, r_0^2\,.\,z_2' = 0\cdot040$$
und damit auch für A':
$$z_1' = \frac{\Psi'}{a\, r_1'^2} = 0\cdot135\ m.$$

Mit r_1' und z_1' ist Punkt A' festgelegt.

Mit den Koordinaten von A' und B' rechnet man aus:
$$(w_n\, r)_1 = b^2\, r^2 - c^2\, z^2$$
und
$$b\, r = c\, z,$$
$$b^2 = 20\cdot1,$$
$$c^2 = 31\cdot2.$$

Durch Festlegung der Punkte A' und B' sind auch die Grundlagen für die Aufzeichnung jedes beliebigen Stromflächenmeridians $\Psi = a\, r^2\, z$ geschaffen.

A. Konstruktion des Laufraddurchschnittes.

Durch A' und B' ist der Stromflächenmeridian Ψ', durch F'' der Meridian Ψ'' zu legen (Abb. 54, Taf. VII).

Schreibt man die Gleichung dieser Kurven in der Form
$$\frac{\Psi}{a} = r^2\, z = C,$$
so deckt sie sich mit der Gleichung der Druckkurve der polytropen Zustandsänderung der Gase, und es können daher die Stromflächenmeridiane nach den Verfahren von Tolle und Brauer konstruiert werden.

Auf Ψ' übergegangen könnten aus A' und B' sofort die Winkel für das Verfahren nach Brauer ermittelt

werden, doch ergäben sie sich zu groß und daher die Zwischenpunkte in zu großer Entfernung. Man wird daher mit Vorteil zunächst nach dem Verfahren von Tolle einen Zwischenpunkt auf Ψ' ableiten. Nach diesem ergibt sich die Abszisse, bezw. Ordinate des neuen Punktes als mittlere geometrische Proportionale aus den Abszissen, bezw. Ordinaten zweier gegebener Punkte:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Psi}{a} = r_1^2 \cdot z_1 = C,\\ r_2^2 z_2 = C,\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}(r_1 r_2)^2 \cdot (z_1 z_2) = C^2,\\ (\sqrt{r_1 r_2})^2 \cdot (\sqrt{z_1 z_2}) = C,\end{aligned}$$

$$\sqrt{r_1 r_2} = r, \qquad \sqrt{z_1 z_2} = z,$$

folgt

$$r^2 z = \frac{\Psi}{a}.$$

Projiziert man demnach B' nach B_z' in die z-Achse und A' nach A_k' in den über $O B_z'$ als Durchmesser gezeichneten Halbkreis K_z, so ist bereits $O A_k' = z_M'$ die Ordinate des neuen Punktes, welcher in der durch M_z' parallel zur r-Achse gelegten Geraden liegen muß.

Projiziert man ferner A' nach A_r' in die r-Achse und B' nach B_k' in den über $O A_r'$ als Durchmesser gezeichneten Halbkreis K_r, so ist $O B_k' = r_M'$ die Abszisse des neuen Punktes, welcher sich in M' als Schnittpunkt der in M_r' errichteten Senkrechten mit der früher durch M_z' gelegten Horizontalen ergibt.

Verfährt man mit M' und A' und mit M' und B' in gleicher Weise, so erhält man weitere Punkte.

Doch empfiehlt es sich, etwa mit Hilfe der Punkte M' und B' die Winkel für das Verfahren von Brauer zu bestimmen, welche dann für alle Stromflächenmeridiane verwendet werden können.

Zu diesem Zwecke wird in B_z' eine Gerade unter 45° gegen die negative z-Richtung gezogen und deren Schnittpunkt B_y mit der Horizontalen durch M' gesucht.

$O B_y$ gibt bereits den zweiten Schenkel Y des Winkels β.

Ferner ist durch M_r' eine Gerade unter 45° gegen die negative r-Richtung zu ziehen und deren Schnitt B_x mit der Senkrechten durch B' zu bestimmen. $O B_x$ ist der zweite Schenkel X des Winkels α.

Will man nun Ψ'' zeichnen, so hat man $F'' B_z'$, B_z, B_y und durch B_y eine Horizontale, ferner $F'' F_x$, $F_x N_r''$ und durch N_r'' eine Vertikale zu ziehen; in N'' ergibt sich ein Punkt des Meridianes Ψ''; von N'' aus ist in gleicher Weise fortzufahren.

Die beiden Winkel β und α sind durch die Beziehung gebunden

$$1 + \operatorname{tg} \beta = (1 + \operatorname{tg} \alpha)^2.$$

Man erhält auch leicht für jeden Punkt der Kurven Ψ die zugehörige Tangente:

$$a r^2 z = \Psi,$$

$$2 a z r . d r + a r^2 . d z = 0,$$

$$\frac{d z}{d r} = -2 . \frac{z}{r}.$$

Faßt man beispielsweise den Punkt A' ins Auge, so sieht man, daß

$$\frac{z}{r} = \operatorname{tg} \delta \text{ ist;}$$

$\frac{d z}{d r}$ ist aber die trigonometrische Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente mit der positiven r-Achse einschließt, welcher mit τ bezeichnet sei; somit

$$\operatorname{tg} \tau = -2 \operatorname{tg} \delta \quad \ldots \ldots \quad a').$$

Will man also die Richtung der Tangente in A', so ziehe man $O A'$, ferner $P Q \perp O r$ in beliebiger Ferne $O P$ von O, bestimme den Schnitt U beider und mache $U U_1 = P U$, ferner $P P_1 = O P$; $P_1 U_1$ gibt die Richtung der Tangente in A'; denn es ist

$$\frac{P U}{P O} = \operatorname{tg} \delta,$$

$$-\frac{P U_1}{P P_1} = -2 \frac{P U}{P O} = -2 \operatorname{tg} \delta,$$

daher

$$\sphericalangle + r P_1 U_1 = \tau.$$

Die Tangenten in den Schnittpunkten eines beliebigen durch O gezogenen Strahles mit sämtlichen Meridianen $\Psi = a r^2 z$ sind nach Gleichung a') untereinander parallel, worauf bereits Zeuner auf S. 152 des ersten Bandes der „Technischen Thermodynamik", 2. Auflage, 1900, hingewiesen hat. Es sind daher für den Fall

$$(w_u r)_2 = 0$$

und für die Gleichung des Meridianes der Austrittsfläche

$$b r = c z$$

die absoluten Austrittsgeschwindigkeiten, welche wegen $w_u = 0$ in Ebenen liegen, die durch die Achse gehen, untereinander parallel. Ihre Richtung ist durch $P_1 Q$ gegeben, welche nach dem für A' erläuterten Verfahren erhalten wird.

Der Größe nach ist die absolute Austrittsgeschwindigkeit der Abszisse r direkt proportional, wie aus folgendem zu ersehen ist:

$$w_2^2 = w_{r_2}^2 + w_{z_2}^2,$$

$$b r_2 = c z_2; \; z_2 = \frac{b}{c} . r_2,$$

$$w_{r_2} = -a r_2,$$

$$w_{z_2} = 2\,a\,z_2 = 2\,\frac{a\,b}{c}\,.\,r_2,$$

$$w_2^2 = a^2\left(1 + \frac{4\,b^2}{c^2}\right).\,r_2^2,$$

$$w_2 = a\,.\sqrt{1 + \frac{4\,b^2}{c^2}}\,.\,r_2.$$

Hat man demnach z. B. die absolute Austrittsgeschwindigkeit für B' bestimmt und in $B'\,w_2'$ aufgetragen, so erhält man w_2 für alle übrigen Stromfäden durch Ziehen der Geraden $w_2'\,O$.

Die „Austrittsverluste" $\frac{w_2^2}{2\,g}$ sind durch eine Parabel begrenzt.

Zur Begrenzung des Laufraddurchschnittes wäre noch die Eintrittshyperbel zu zeichnen.

Ihre Gleichung lautet:

$$(w_n\,r)_1 = b^2\,r^2 - c^2\,z^2,$$

$$2{\cdot}655 = 20{\cdot}1\,.\,r^2 - 31{\cdot}2\,z^2$$

oder

$$\frac{r^2}{0{\cdot}1321} - \frac{z^2}{0{\cdot}0851} = 1,$$

woraus sich die reelle Halbachse mit $O\,S_1 = m = \sqrt{0{\cdot}1321} = 0{\cdot}364\,m$ rechnet.

In der in der Abbildung angegebenen Weise folgt der Brennpunkt F_1, und die Hyperbel kann auf bekannte Art gezeichnet werden. Reicht der Platz am Zeichenbrett nicht aus, so hat man die Koordinaten von A'' und von anderen Zwischenpunkten zu rechnen.

Die Koordinaten von A'' ergeben sich mit $r_1'' = 0{\cdot}368\,m$ und $z_1'' = 0{\cdot}047\,m$.

Der Eintrittsfläche ist der Zeiger *1*, der Austrittsfläche der Zeiger *2* zugewiesen. Dazwischen liegende Momentenflächen erhalten die Zeiger *3*, *4* u. s. w.

Die zur Stromfläche Ψ'' gehörigen Größen sind durch $''$, jene der Stromfläche Ψ' durch $'$ gekennzeichnet.

B. Die Druckverhältnisse in der Turbine.

1. Hydraulischer Wirkungsgrad.

Der Ermittlung der Druckverteilung in den Meridianen der Ein- und Austrittsfläche sowie in den Stromflächenmeridianen Ψ' und Ψ'' möge die Bestimmung des hydraulischen Wirkungsgrades vorhergehen. Zu diesem Zwecke ist die Energiegleichung aufzuschreiben (Abb. 55, S. 155):

Für den Austritt aus dem Leitrade:

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2g} = h_a + \frac{w_0^2}{2g} + H_{01} - \rho_1 H \quad . \quad . \quad 1),$$

Für den Austritt aus dem Laufrade:

$$h_2 + \frac{w_2^2}{2g} = h_1 + \frac{w_1^2}{2g} + H_k - \eta H - \rho_2 H \quad . \quad . \quad 2).$$

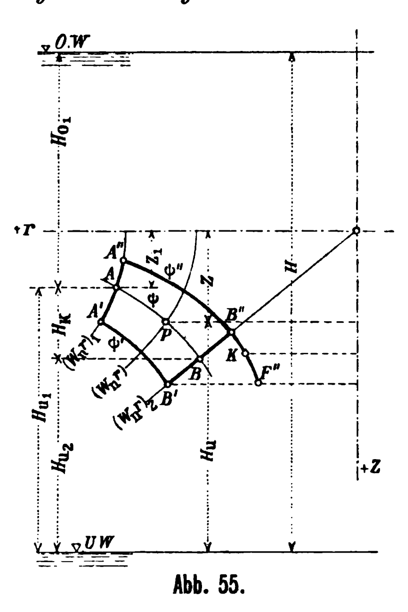


Abb. 55.

Für den Austritt aus dem Saugrohre:

$$h_a + \frac{w_a^2}{2g} = h_2 + \frac{w_2^2}{2g} + H_{u2} - \rho_3 . H \quad . \quad . \quad 3),$$

aus welchen Gleichungen durch Addition erhalten wird:

$$\frac{w_a^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = H - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) H - \eta H,$$

$$\eta = 1 - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) - k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4),$$

wenn

$$\frac{w_a^2 - w_0^2}{2g} = k . H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

gesetzt wird.

Für

$$w_0 = 0$$

wäre

$$k . H = \frac{w_a^2}{2g}.$$

ρ_1, bezw. ρ_2 und ρ_3 wird man für die ganze Ausdehnung der Eintritts-, bezw. Austrittsfläche mit demselben

Werte annehmen können, für k ist ein Mittelwert zu setzen. Die Geschwindigkeiten sind absolute.

Im folgenden wurde angenommen:

$$\left.\begin{array}{l}\rho_1 = 0{\cdot}06 \\ \rho_2 = 0{\cdot}04 \\ \rho_3 = 0{\cdot}03 \\ k = 0{\cdot}02\end{array}\right\} \eta = 1 - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) - k = 0{\cdot}85.$$

Die Verlusthöhe für den Spalt wurde auf Leit- und Laufrad verteilt.

Anzugeben ist noch die Entstehung der zweiten von den drei Energiegleichungen.

Allgemein wäre sie in folgender Form aufzuschreiben:

$$h_2 + \frac{w_2^2}{2g} = h_1 + \frac{w_1^2}{2g} + H_k - \frac{\omega}{g}[(w_n r)_1 - (w_n r)_2] - \rho_2 . H.$$

$$\frac{\omega}{g}[(w_n r)_1 - (w_n r)_2]$$

ist die an das Rad abgegebene hydraulische Leistung von 1 kg Aufschlagwasser; denn es ist:

$$(-M\,\omega) = \omega . \frac{Q . \gamma}{g}[(w_n r)_1 - (w_n r)_2] = \eta\, L = \eta\, Q\, \gamma\, H,$$

somit für 1 kg:

$$\frac{\omega}{g}[(w_n r)_1 - (w_n r)_2] = \eta . H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6);$$

mit $(w_n r)_2 = 0$:

$$\frac{\omega}{g}(w_n r)_1 = \eta . H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7).$$

2. Druckverteilung in der Eintrittsfläche.

Setzt man in der ersten der Energiegleichungen 1)

$$H_{01} = H - H_{u1},$$

so erhält man für die absolute Druckhöhe h_1 in einem beliebigen Parallelkreise der Eintrittsfläche:

$$h_1 = \frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_{u1}) + (1 - \rho_1) H - \frac{w_1^2}{2g} \quad . \quad . \quad \mathrm{I}).$$

$$\left.\begin{array}{l} w_1^2 = w_{r_1}^2 + w_{z_1}^2 + w_{n1}^2 \\ w_{r_1} = -a\, r_1 \\ w_{z_1} = 2\, a\, z_1 \\ w_{n1} = \dfrac{(w_n r)_1}{r_1} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I\,a}).$$

In dieser Form ist sie für die graphische Ausmittlung bequemer; denn zeichnet man die Turbine in einem beliebigen Maßstabe in richtiger Lage zum $U.\ W.$ auf

(Abb. 59, Taf. VIII), und legt man in der Entfernung $h_a = 10\,m$ vom $U.\,W.$-Spiegel eine zu diesem parallele Ebene $O\,O$, so folgt $(h_a - H_u)$ unmittelbar aus der Abbildung unter der Atmosphärendruckebene, während die Summe der übrigen Glieder über oder unter dieser aufzutragen ist, je nachdem sich diese Summe positiv oder negativ ergibt.

Die Turbine sei derart eingebaut, daß der Parallelkreis A' um

$$H_{u1}' = 3{\cdot}000\,m$$

über $U.\,W.$ liege. Damit sind alle übrigen H_u bestimmt.

Die Gleichungen I) und Ia) sind nun zunächst anzuwenden auf die Parallelkreise A' und A''.

Für A'' möge die Rechnung durchgeführt werden:

$$A'' \begin{cases} r_1'' = 0{\cdot}368\ m. \\ z_1'' = 0{\cdot}047\ m. \end{cases} \qquad \begin{aligned} H_{u1}'' &= H_{u1}' + z_1' - z_1''. \\ &= 3{\cdot}000 + 0{\cdot}135 - 0{\cdot}047. \\ H_{u1}'' &= 3{\cdot}088\ m. \end{aligned}$$

$$w_{r_1}'' = -a\,r_1'' = -6{\cdot}25\,.\,0{\cdot}368 = -2{\cdot}300\ m/\text{Sek}.$$

$$w_{z_1}'' = 2\,a\,z_1'' = 2\,.\,6{\cdot}25\,.\,0{\cdot}047 = 0{\cdot}588\ m/\text{Sek}.$$

$$w_{u1}'' = \frac{(w_u r)_1}{r_1''} = \frac{2{\cdot}655}{0{\cdot}368} = 7{\cdot}215\ m/\text{Sek}.$$

$$w_1''^2 = w_{r_1}''^2 + w_{z_1}''^2 + w_{u1}''^2 = 57{\cdot}692.$$

$$\frac{w_1''^2}{2\,g} = 2{\cdot}940\ m.$$

$$h_1'' = \frac{w_0^2}{2\,g} + (h_a - H_{u1}'') + (1 - \rho_1)\,H - \frac{w_1''^2}{2\,g}$$

$$= \frac{w_0^2}{2\,g} + (10 - 3{\cdot}088) + (1 - 0{\cdot}06)\,.\,5 - 2{\cdot}940.$$

$$h_1'' = \frac{w_0^2}{2\,g} + 6{\cdot}912 + 1{\cdot}740\,m.$$

Ebenso rechnet sich h_1' für A', wobei auch hier $\rho_1 = 0{\cdot}06$ zu setzen ist. Die zugehörigen Werte sind in der Tabelle eingetragen.

Um noch einen Punkt auf der Druckverteilungskurve zu erhalten, kann irgend ein Punkt A''' in der Eintrittshyperbel zwischen A' und A'' angenommen werden. r_1''' und z_1''' folgen aus der Abbildung und damit alle Werte für h_1'''.

In Abb. 57 (Taf. VII) und 59 (Taf. VIII) gehört der Punkt, bezw. der Parallelkreis A''' einer mittleren Stromfläche Ψ''' an, welche durch den Parallelkreis $r_2''' = \frac{r_2' + r_2''}{2}$ hindurchgeht.

Sie wurde in Abb. 57 (Taf. VII) konstruiert und in die Abb. 59 (Taf. VIII) übertragen. Die Werte $r_1''' = 0{\cdot}379\ m$ und $z_1''' = 0{\cdot}087\ m$ können der Abb. 57 entnommen werden,

und damit sind alle zur Berechnung von h_1''' notwendigen Größen gegeben; sie sind in der Tabelle zusammengestellt.

Wollte man die zeichnerisch ermittelten Koordinaten von A''' nachrechnen, so wäre, wie folgt, zu verfahren:

$$B''' \begin{cases} r_2''' = \frac{1}{2}(r_2' + r_2'') = 0{\cdot}250\,m. \\ z_2''' = \frac{1}{2}(z_2' + z_2'') = 0{\cdot}200\,m. \end{cases}$$

$$\Psi''' = a\,r_2'''^2\,z''' = 0{\cdot}078.$$

$$\left.\begin{array}{r} a\,r^2 z = 0{\cdot}078 \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{Meridian } \Psi'''. \\ 20{\cdot}1\,r^2 - 31{\cdot}2\,z^2 = 2{\cdot}655 \text{ Eintrittshyperbel 1.} \end{array}\right\}$$

$$z_1'''^3 + 0{\cdot}0851\,z_1''' - 0{\cdot}008053 = 0.$$

Dieser Gleichung für z_1''' muß der aus Abb. 57 (Taf. VII) entnommene Werte für z_1''' genügen, was auch der Fall ist.

In die Gleichung $0{\cdot}078 = a\,r^2 z$ eingesetzt, muß sich der Wert $r_1''' = 0{\cdot}379$ ergeben.

Um die Druckverteilung übersichtlicher zu erhalten, sind in Abb. 59 (Taf. VIII) die Längen (Abszissen r) im fünffachen Maßstabe der Höhen (Ordinaten z und Druckhöhen h) aufgetragen, und zwar nur jener Teil der Druckhöhe, welcher über oder unter die h_a-Ebene zu liegen kommt, d. h. also immer die Druckhöhe vermindert um $\left[\frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_u)\right] m$. $(h_a - H_u)$ erscheint verkürzt.

Diese Teile genügen zur Bildung der Druckdifferenzen, auf welche es schließlich ankommt. Auf $\frac{w_0^2}{2g}$ wurde übrigens wegen seiner Kleinheit keine Rücksicht genommen. Bei der Bildung der Druckdifferenzen fällt diese Geschwindigkeitshöhe hinaus, so daß diese Vernachlässigung auf das Endergebnis keinen Einfluß hat.

Wollte man ganz strenge vorgehen, so wäre die Vergleichsebene nicht um h_a, sondern um $\left(h_a + \frac{w_0^2}{2g}\right) m$ über $U.W.$ aufzutragen (Abb. 56, S. 161).

Die Druckverteilungskurve für $A'\,A'''\,A''$ ist in Abb. 59 (Taf. VIII) mit $A_1\,A_3\,A_2$ bezeichnet. Die absolute Druckhöhe für irgend einen Punkt, bezw. Parallelkreis ist immer durch die Länge der Vertikalen zwischen diesen beiden Kurven gegeben.

3. Druckverteilung in der Austrittsfläche.

Für irgend einen Parallelkreis auf der Austrittsfläche lautet die Energiegleichung (Abb. 55, S. 150):

$$h_2 + \frac{w_2^2}{2g} = h_1 + \frac{w_1^2}{2g} + H_k - \frac{\omega}{g}[(w_u r)_1 - (w_u r)_2] - \rho_2 H.$$

Mit Gleichung I), ferner mit $\frac{\omega}{g}(w_u r)_1 = \eta H$, Gleichung 7) und $(w_u r)_2 = 0$ erhält man:

$$h_2 = \frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_{u2}) + (1 - \rho_1 - \rho_2) . H - \eta H - \frac{w_2^2}{2g} \quad \text{II)}.$$

Wegen $w_{u2} = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{wird} & w_2^2 = w_{r_2}^2 + w_{z_2}^2, \\ \text{mit} & w_{r_2} = -a r_2 \\ \text{und} & w_{z_2} = 2 a z_2 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{II}a).$$

Man könnte h_2 auch aus der Energiegleichung für den Saugrohraustritt erhalten:

$$h_a + \frac{w_u^2}{2g} = h_2 + \frac{w_2^2}{2g} + H_{u2} - \rho_3 H,$$

$$h_2 = (h_a - H_{u2}) - \frac{w_2^2 - w_u^2}{2g} + \rho_3 H \quad . \; . \; . \; \text{II'}).$$

Man erhält II') sofort aus II), wenn man in dieser nach Gleichung 4) und 5)

für

$$\eta H = H - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) . H - k . H \quad . \; . \; . \; 4)$$

und

$$k H = \frac{w_u^2 - w_0^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

setzt.

Für die Parallelkreise $B' B''' B''$ wurden die Druckhöhen $h_2' h_2''' h_2''$ mit $\rho_1 = 0{\cdot}06$ und $\rho_2 = 0{\cdot}04$ gerechnet und wie für die Eintrittsfläche in Abb. 59 (Taf. VIII) eingetragen. Die Druckverteilungskurve für die Austrittsfläche ist mit $B_1 B_3 B_2$ bezeichnet. Die zusammengehörigen Werte sind aus der Tabelle ersichtlich (S. 156).

4. Druckverteilung in einer beliebigen Stromfläche Ψ und in den Grenzflächen Ψ' und Ψ'' innerhalb des Laufrades.

Für irgend einen Parallelkreis P zwischen A und B auf der beliebigen Stromfläche Ψ (Abb. 55, S. 150) lautet die Energiegleichung:

$$\left.\begin{array}{l} h + \frac{w^2}{2g} = h_1 + \frac{w_1^2}{2g} + (z - z_1) - \\ - \frac{\omega}{g}[(w_u r)_1 - (w_u r)] - \rho H \end{array}\right\} \quad . \; . \; \text{III'});$$

mit Gleichung I) und 7) erhält man für die absolute Druckhöhe in P

$$\left.\begin{array}{l} h = \frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_u) + (1 - \rho_1 - \rho) H - \eta H + \\ \qquad + \frac{\omega}{g}(w_n r) - \frac{w^2}{2g} \end{array}\right\} \quad . \; . \; \text{III}).$$

Die Größen ohne Ziffernzeiger beziehen sich auf den Parallelkreis P, die mit dem Zeiger 1 auf den Parallelkreis A, in welchem die Stromfläche Ψ die Eintrittsfläche schneidet.

$\eta H = \frac{\omega}{g}\,(w_n r)_1$ ist das arbeitende Gefälle oder das Arbeitsvermögen für 1 kg Wasser im Parallelkreise A, gleich groß für alle Parallelkreise der Eintrittsfläche mit dem Meridiane:

$$(w_n r)_1 = b^2 r^2 - c^2 z^2.$$

$\frac{\omega}{g}(w_n r)$ ist der noch unverbrauchte Teil des arbeitenden Gefälles oder das vorhandene Arbeitsvermögen für 1 kg Wasser im Parallelkreise P, gleich groß für alle Parallelkreise der Rotationsfläche mit dem Meridiane:

$$(w_n r) = b^2 r^2 - c^2 z^2,$$

welche durch den Parallelkreis P hindurchgeht und durch die Annahme von $P\,(r_P\, z_P)$ bestimmt ist.

Die Differenz

$$\eta H - \frac{\omega}{g} \cdot (w_n r)$$

ist die hydraulische Leistung, welche von 1 kg Wasser auf Ψz wischen der Eintrittsfläche und der Fläche $(w_n r)$ an das Rad abgegeben wurde, oder das verbrauchte arbeitende Gefälle.

Für alle Stromflächen von Ψ' bis Ψ'' ist diese Differenz zwischen $(w_n r)_1$ und $(w_n r)$ dieselbe.

Um mehrere Punkte der Druckverteilungskurve zu erhalten, sind verschiedene P anzunehmen; aus ihren r und z folgen:

$$\left.\begin{array}{ll} & w_r = -\,a r, \\ & w_z = 2 a z, \\ \text{ferner} & (w_n r) = b^2 r^2 - c^2 z^2, \\ \text{daraus} & w_n = \frac{(w_n r)}{r} \\ \text{und damit} & w^2 = w_r^2 + w_z^2 + w_n^2 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; \text{III}a).$$

Es kann somit aus III) für jeden Parallelkreis P das zugehörige h gerechnet werden, wobei ρ von $\rho = 0$ in A bis $\rho = \rho_2 = 0{\cdot}04$ in B wächst.

	r	z	$(w_n r)$	w_n^2	w_r^2	w_z^2	w^2	$\frac{w^2}{2g}$
A'	0·400	0·135	2·655	44·09	6·25	2·86	53·20	2·72
C'	0·370	0·158	1·973	28·41	5·35	3·90	37·66	1·92
D'	0·344	0·183	1·334	15·05	4·62	5·24	24·91	1·27
E'	0·320	0·210	0·682	4·54	4·00	6·89	15·43	0·79
B'	0·300	0·240	0	0	3·53	9·00	12·53	0·64
A'''	0·379	0·087	2·655	49·00	5·62	1·19	55·81	2·84
C'''	0·341	0·108	1·973	33·52	4·54	1·82	39·89	2·03
D'''	0·307	0·134	1·334	18·84	3·68	2·81	25·32	1·29
E'''	0·276	0·165	0·682	6·10	2·98	4·26	13.33	0·68
B'''	0·250	0·200	0	0	2·45	6·25	8·70	0·44
A''	0·368	0·047	2·655	52·06	5·29	0·35	57·69	2·94
C''	0·324	0·062	1·973	37·09	4·09	0·59	41·77	2·13
D''	0·278	0·084	1·334	23·04	3·01	1·09	27·14	1·39
E''	0·235	0·117	0·682	8·41	2·15	2·14	12·70	0·65
B''	0·200	0·160	0	0	1·56	4·00	5·56	0·28

Es wird sich empfehlen, eine gewisse Gesetzmäßigkeit in der Annahme der P eintreten zu lassen, etwa derart, daß zwischen den angenommenen Flächen gleichen Arbeitsvermögens $(w_n r)$ gleiche Leistungen abgegeben werden. Wollte man zwischen A und B noch 3 Punkte auf diese Weise bestimmen, so würde von Fläche zu Fläche $^1/_4$ der ganzen Leistung übertragen, und da

$$\frac{\omega}{g}(w_n r)_1 = \eta H$$

in der Eintrittsfläche ist, so wäre

$$\frac{\omega}{g}(w_n r)_3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{\omega}{g}(w_n r)_1;\ (w_n r)_3 = \frac{3}{4}(w_n r)_1;$$

$$\text{ebenso } (w_n r)_4 = \frac{1}{2}(w_n r)_1;$$

$$(w_n r)_5 = \frac{1}{4}(w_n r)_1;$$

in der Austrittsfläche ist $(w_n r)_2 = 0$.

Für unser Beispiel würden sich der Reihe nach ergeben:

$(w_n r)_1 = 2{\cdot}655$	m^2/sek	Hyperbel 1,
$(w_n r)_3 = 1{\cdot}991$	„	„ 3,
$(w_n r)_4 = 1{\cdot}328$	„	„ 4,
$(w_n r)_5 = 0{\cdot}664$	„	„ 5,
$(w_n r)_2 = 0$	„	Asymptote 2.

Da b und c bekannt sind, so können die Hyperbeln

$$(w_n r) = b^2 r^2 - c^2 z^2$$

H_u	$h_a - H_u$	$(1-\Sigma\rho).H$	$\frac{\omega}{g}(w_u r)$	$\eta.H$	h	h
3·000	7·000	4·70	—	—	7·00 + 1·98	8·98
2·977	7·023	4·65	3·15	4·25	7·02 + 1·63	8·65
2·952	7·048	4·60	2·14	4·25	7·05 + 1·22	8·27
2·925	7·075	4·55	1·09	4·25	7·08 + 0·60	7·68
2·895	7·105	4·50	0	4·25	7·11 — 0·39	7·50
3·048	6·952	4·70	—	—	6·95 + 1·86	8·81
3·027	6·973	4·65	3·15	4·25	6·97 + 1·52	8·49
3·001	6·999	4·60	2·14	4·25	6·70 + 1·20	8·20
2·970	7·030	4·55	1·09	4·25	7·03 + 0·71	7·74
2·935	7·065	4·50	0	4·25	7·07 — 0·19	6·87
3·088	6·912	4·70	—	—	6·91 + 1·74	8·65
3·074	6·926	4·65	3·15	4·25	6·93 + 1·42	8·35
3·052	6·948	4·60	2·14	4·25	6·95 + 1·10	8·05
3·018	6·982	4·55	1·09	4·25	6·98 + 0·71	7·69
2·975	7·025	4·50	0	4·25	7·03 — 0·03	6·99

der Reihe nach gezeichnet und ihre Schnittpunkte mit Ψ bestimmt werden. Aus ihren Koordinaten ergibt sich H_u und aus III*a*) w^2, damit aus III) die jeweilige Druckhöhe h; ρ wäre der Reihe nach etwa mit 0·01, 0·02, 0·03 anzunehmen.

Die in Abb. 57 (Taf. VII) konstruierten und in die Abb. 59 (Taf. VIII) übertragenen Hyperbeln wurden nicht auf die angegebene Art erhalten, sondern dadurch, daß Bogen $A''' B'''$ des mittleren Meridianes Ψ''' in 4 gleiche Teile geteilt wurde, wodurch sich die Koordinaten der Punkte $C''' D''' E'''$ ergaben, deren Werte in der Tabelle eingetragen sind.

Aus diesen Koordinaten folgen dann die Hyperbelgleichungen und die Halbachsen.

Beispielsweise wird für die durch C''' gelegte Hyperbel 3 aus $(w_u r)_3 = b^2 r_3{}^2 - c^2 z_3{}^2$ mit $\begin{cases} r_3 = 0{\cdot}341\ m, \\ z_3 = 0{\cdot}108\ m \end{cases}$

$$(w_u r)_3 = 20{\cdot}1 \,.\, 0{\cdot}341^2 - 31{\cdot}2 \,.\, 0{\cdot}108^2,$$

$$(w_u r)_3 = 1{\cdot}973\ m^2/\text{sek}.$$

Aus

$$(w_u r)_3 = b^2 r^2 - c^2 z^2,$$

$$1{\cdot}973 = 20{\cdot}1\, r^2 - 31{\cdot}2\, z^2$$

folgt:

$$\frac{r^2}{0{\cdot}0982} - \frac{z^2}{0{\cdot}0632} = 1,$$

woraus sich die reelle Halbachse mit

$$\overline{OS_3} = m_3 = \sqrt{0{\cdot}0982} = 0{\cdot}313\ m$$

ergibt.

Ebenso folgt für

Hyperbel 4: $(w_u r)_4 = 1{\cdot}334\ m^2/\text{sek} \quad m_4 = 0{\cdot}258\ m,$

Hyperbel 5: $(w_u r)_5 = 0{\cdot}682 \quad " \quad m_5 = 0{\cdot}184\ m.$

Die Hyperbeln gleicher Leistungsdifferenzen fallen fast mit den eben ermittelten zusammen. Die zweite von jenen würde etwas höher, die dritte und vierte etwas tiefer als diese liegen.

Aus III) und IIIa) können die Druckhöhen mit $\rho = 0{\cdot}01,\ 0{\cdot}02,\ 0{\cdot}03$ für $C''' D''' E'''$ gerechnet werden; ihre Werte sind in die Tabelle eingetragen; für den Zapfendruck sind sie nicht erforderlich; sie geben nur eine bessere Übersicht über die Druckverhältnisse im Kanal.

Geht man nun auf die Druckverteilung längs Ψ' zwischen A' und B' über, so sind zuerst die Koordinaten der Schnittpunkte $C' D' E'$ der Hyperbeln 3, 4 und 5 mit dem Stromflächenmeridiane Ψ' zu bestimmen. Sie wurden der Abb. 57 (Taf. VII) entnommen.

Wollte man sie durch Rechnung kontrollieren, so wäre beispielsweise für C':

$$\left.\begin{array}{ll} 20{\cdot}1\, r^2 - 31{\cdot}2\, z^2 = 1{\cdot}973 & \text{Hyperbel 3,} \\ 6{\cdot}25\, r^2 z = 0{\cdot}135 & \Psi', \end{array}\right\} C' \ (r_3' \text{ und } z_3').$$

Aus z_3' ergibt sich H_{u3}', ferner folgen aus IIIa) die Komponenten, das Quadrat und die Geschwindigkeitshöhe der absoluten Geschwindigkeit im Parallelkreise C'; mit $\rho = 0{\cdot}01$ kann dann aus III) die absolute Druckhöhe für diesen Parallelkreis h_3' gerechnet werden.

In gleicher Weise ist für D' und E' vorzugehen; die zugehörigen Druckhöhen sind h_4' und h_5' mit $\rho = 0{\cdot}02$, beziehungsweise $\rho = 0{\cdot}03$ aus III) gerechnet.

Nicht anders ist mit den Punkten $C'' D''$ und E'' in Ψ'' zu verfahren. Die Gleichungen IIIa) und III), letztere der Reihe nach mit $\rho = 0{\cdot}01,\ 0{\cdot}02,\ 0{\cdot}03$ liefern die absoluten Druckhöhen h_3'', h_4'' und h_5''.

Alle diese Werte sind in der Tabelle zusammengestellt und die Druckhöhen in die Abb. 59 (Taf. VIII) eingetragen. Es ergeben sich die Kurven $A_1\ C_1\ D_1\ E_1\ B_1$ für Ψ' und $A_2\ C_2\ D_2\ E_2\ B_2$ für Ψ''. Die absolute Druckhöhe liegt immer zwischen den zusammengehörigen, übereinander liegenden Punkten in dem betreffenden Stromflächenmeridiane und der Druckverteilungskurve.

Ließe man beispielsweise die Fläche $A_1\ B_1\ B'\ A'A$ um die Turbinenachse rotieren, so gäbe das Gewicht des Wasserrotationskörpers den von den Druckverhältnissen innerhalb der Turbine herrührenden achsialen, nach abwärts wirkenden Gesamtdruck an, welchen der untere Kranz erfährt. Das Gewicht dieses Wasserkörpers ist

$$\gamma \cdot \int_{r_2'}^{r_1'} h' \cdot 2 r \pi d r.$$

Ebenso ergibt sich der von den Druckverhältnissen innerhalb der Turbine herrührende nach aufwärts wirkende achsiale Druck auf Ψ'' aus dem den Ausdruck

$$\gamma \cdot \int_{r_2''}^{r_1''} h'' \cdot 2 r \pi . d r$$

darstellenden Umdrehungskörper.

5. Druckverteilung längs Ψ'' zwischen B'' und F''.

Für einen beliebigen Parallelkreis K (Abb. 55, S. 150) zwischen B'' und F'' lautet die Energiegleichung:

$$h'' + \frac{w''^2}{2g} = h_2'' + \frac{w_2''^2}{2g} + (z'' - z_2'') - \rho_3'' . H.$$

Aus II) folgt:

$$h_2'' + \frac{w_2''^2}{2g} = \frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_{u_2}'') + (1 - \rho_1 - \rho_2) H - \eta H$$

Ferner ist:

$$-[H_{u_2}'' - z'' + z_2''] = - H_u''$$

und daher die absolute Druckhöhe im beliebigen Parallelkreise K

$$\left. \begin{aligned} h'' = \frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_u'') + \\ + (1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3'') H - \eta H - \frac{w''^2}{2g} \end{aligned} \right\} \quad . \quad \text{IV}).$$

$$\left. \begin{aligned} w_z'' &= 2 a z, \\ w_r'' &= - a r, \\ w_n'' &= 0, \\ w''^2 &= w_r''^2 + w_z''^2 \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{IV}a).$$

Für

$$F'' \; (r_0 = 0{\cdot}163, \; z_2' = 0{\cdot}240)$$

wird

$$\begin{aligned} H_u'' &= 2{\cdot}895\, m, \\ w_r'' &= - 1{\cdot}02\, m/\text{Sek.} \\ w_z'' &= 3{\cdot}00\, m/\text{Sek.} \\ w''^2 &= 10{\cdot}040, \\ \frac{w''^2}{2g} &= 0{\cdot}512\, m; \end{aligned}$$

mit

$$\rho_3'' = 0{\cdot}01$$

wird

$$h'' = \frac{w_0^2}{2g} + 7{\cdot}105 - 0{\cdot}312\, m,$$

welcher Wert wie die übrigen Druckhöhen in Abb. 59 (Taf. VIII) eingetragen wurde.

In Abb. 56 (S. 161) sind die Verhältnisse für einen Stromfaden oder, wenn man will, für ein Teilturbinchen in Ψ'' dargestellt.

Die Abbildung gibt ein anschauliches Bild über die Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse sowie über die Energieabgabe in der Turbine. Zuführung und Abführung sind willkürlich eingezeichnet, jene mit stetiger Querschnittsänderung von w_0 bis w_1'' vom $O.W.$ bis zur Turbine (Stromfläche Ψ'') längs eines Kreisbogens $(O.W.)A''$.

C. Der Druck auf den Spurzapfen.

a. Der hydrodynamische Teil des Zapfendruckes.

Es gilt auch hier die Gleichung 21) (S. 133):

$$-\int q_z \,.\, d\,m + \int \Delta\, p_r \,.\, 2\,r\,\pi \,.\, d\,r = -\int \frac{d\,w_z}{d\,t} \,.\, d\,m + \int g \,.\, d m.$$

Und zwar ist:

$R_z = -\int \frac{d\,w_z}{d\,t} \,.\, d\,m$ die achsiale Reaktion,

$P_\Delta = \int \Delta\, p_r \,.\, 2\,r\,\pi \,.\, d\,r - G$ der achsiale hydraulische Gesamtdruck,

$Z_q = -\int q_z \,.\, d\,m$ der achsiale Schaufeldruck,

$G = \int g \,.\, d\,m$ das Gewicht des Wassers im Laufrade.

Es ist dann so wie früher vom Zapfen auf die Spur zu übertragen

$$R_z + G = Z_q + P_\Delta + G.$$

Daraus ergibt sich wieder für die Reaktion die Gleichung 22) (S. 134):

$$R_z = P_\Delta + Z_q.$$

Alle drei Größen beziehen sich auf den mit Schaufeln besetzten Teil des Laufrades.

1. Die achsiale Reaktion R_z.

Es handelt sich um die Ausmittlung der Größe

$$R_z = -\int \frac{d\,w_z}{d\,t} \,.\, d\,m,$$

welche sich, wie eben erwähnt, auf den mit Schaufeln besetzten Teil des Laufrades bezieht.

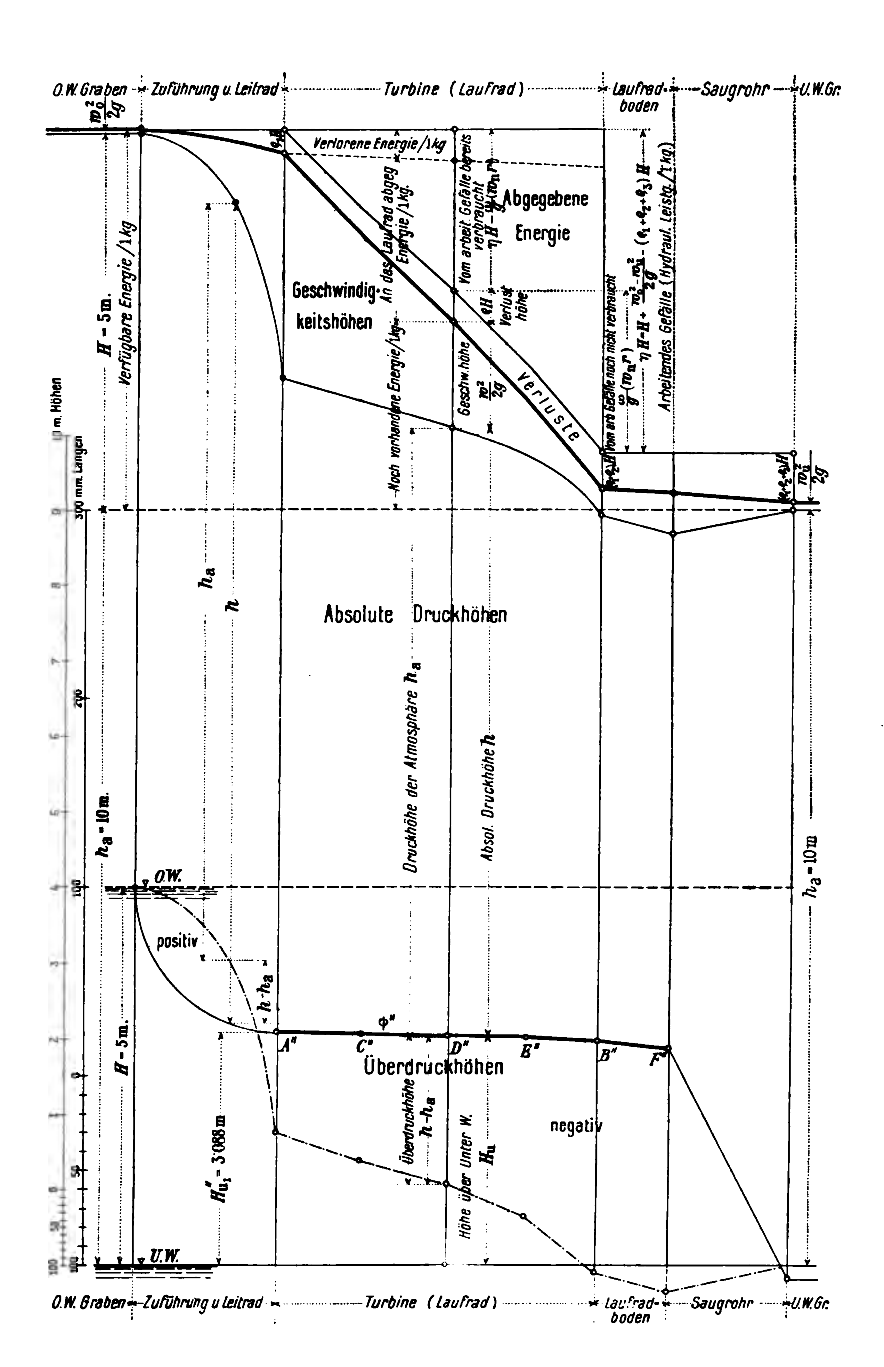

O.W. Graben
Zuführung u. Leitrad
Turbine (Laufrad)
Laufrad-boden
Saugrohr
U.W.Gr.
Verlorene Energie/1kg
Abgegebene Energie
Geschwindig-keitshöhen
Verluste
Absolute Druckhöhen
Druckhöhe der Atmosphäre h_a
Absol. Druckhöhe h
Arbeitendes Gefälle (Hydraul. Leistg./1kg.)
Verfügbare Energie/1kg
$H = 5$ m.
$h_a = 10$ m.
O.W.
U.W.
positiv
negativ
Überdruckhöhen
Überdruckhöhe $h - h_a$
Höhe über Unter W. H_u
$H''_{u_1} = 3.088$ m
A''
C''
D''
E''
B''
F''
$h_a = 10$ m

Abb. 56.

Nimmt man ein Teilturbinchen in der beliebigen Stromfläche Ψ an, welche den Parallelkreis vom Halbmesser r (Abb. 57, Taf. VII) enthält und setzt man zunächst voraus, daß der Laufradboden bis F'' reicht, so ist hiefür

$$r_z' = -\frac{d\,m}{d\,t}\,.\,\Delta\,w_z$$

$$= -\frac{d\,m}{d\,t}\,.\,(w_{z_2}' - w_{z_1}).$$

Da

$w_{z_2}' = 2\,a\,z_2'$ die achsiale Geschwindigkeit im Parallelkreise F und

$w_{z_1} = 2\,a\,z_1$ die achsiale Geschwindigkeit im Parallelkreise A, also

$$w_{z_2}' - w_{z_1} = 2\,a\,.\,(z_2' - z_1) \text{ ist,}$$

so folgt

$$r_z' = -\frac{d\,m}{d\,t}\,.\,2\,a\,(z_2' - z_1).$$

Nun ist für diese Teilturbine die sekundliche Wassermasse

$$\frac{d\,m}{d\,t} = 2\,r\,\pi\,.\,d\,r\,.\,w_{z_2}'\,.\,\frac{\gamma}{g},$$

wobei wegen

$$w_z = 2\,a\,z$$

w_{z_2}' unveränderlich ist in der ganzen Ringfläche von der Breite

$$\overline{B'\,F''} = r_2' - r_0.$$

Es wird somit

$$r_z' = -\frac{2\,a\,\gamma}{g}\,.\,w_{z_2}'\,[2\,r\,\pi\,d\,r\,(z_2' - z_1)].$$

Projiziert man den Schnittpunkt des Meridianes der Stromfläche Ψ mit dem Eintrittsmeridian, den Punkt A, in die Senkrechte des Punktes F nach A_1, so ist

$$\overline{A_1\,F} = z_2' - z_1,$$

und der Ringzylinder von der Breite $d\,r$ und der Höhe $\overline{A_1\,F}$ gibt den Ausdruck in der eckigen Klammer.

Summiert man alle auf gleiche Weise über der ganzen Ringbreite $r_2' - r_0$ entstehenden Ringzylinder, so entsteht der Wasserrotationskörper mit dem Mittelschnitte

$$A_1'\,A_1''\,F''\,B'\,A_1' = F_{\Delta z},$$

dessen Achse mit der Turbinenachse zusammenfällt.

Sein Rauminhalt ist:

$$V_{\Delta z} = \int_{r_0}^{r_2'} 2\,r\,\pi\,d\,r\,(z'_2 - z_1) = F_{\Delta z}\,.\,2\,r_{\Delta z}\,\pi\,m^3,$$

wenn mit $r_{\Delta z}$ der Halbmesser des Schwerpunktes von $F_{\Delta z}$ bezeichnet wird, und es ist somit

$$R_z' = \Sigma r_z' = -\gamma \cdot \frac{2a}{g} \cdot w_{z_2}' \cdot V_{\Delta z}\ kg,$$

proportional dem Gewichte dieses Wasserkörpers.

Setzt man für

$$w_{z_2}' = 2\,a\,z_2',$$

so wird

$$R_z' = -\gamma \cdot \frac{4\,a^2\,z_2'}{g} \cdot V_{\Delta z}\ kg.$$

Multipliziert man die Differenz $(z_2' - z_1)$ mit $\frac{4\,a^2\,z_2'}{g}$, so gibt das Gewicht des neu entstehenden Rotationskörpers vom Volumen

$$V_w = \frac{4\,a^2\,z_2'}{g} \cdot V_{\Delta z} = F_w \cdot 2\,r_{\Delta z} \cdot \pi\ m^3$$

die Größe der Reaktion

$$R_z' = -\gamma \cdot V_w = -\gamma \cdot F_w \cdot 2\,r_{\Delta z}\pi\ kg,$$

und zwar bis hinunter zum Parallelkreise F''.

Einzusetzen ist

$$\gamma = 1000\ kg/m^3 \text{ und } V_w \text{ in } m^3,$$

daher $$F_w = \frac{4\,a^2\,z_2'}{g} \cdot F_{\Delta z}\ m^2 \text{ und } r_{\Delta z} \text{ in } m.$$

Für unseren Fall wäre

$$a = 6{\cdot}25\ \text{Sek.}^{-1},\quad z_2' = 0{\cdot}240\ m,\qquad g = 9{\cdot}81,$$

$$\frac{4\,a^2\,z_2'}{g} = \frac{4 \cdot \overline{6{\cdot}25}^2 \cdot 0{\cdot}240}{9{\cdot}81} = 3{\cdot}824.$$

Da die achsiale Reaktion nur für den mit Schaufeln besetzten Teil des Laufrades zu rechnen ist, so muß der Wasserrotationskörper $B'\,B_1''\,F''\,B'$ abgezogen werden, und es bleibt als Größe der Reaktion, wenn man das Volumen des Rotationskörpers mit dem Mittelschnitte

$$F_{\Delta z}' = A_1'\,A_1''\,B_1''\,B'\,A_1' \qquad V_{\Delta z}' = F_{\Delta z}' \cdot 2\,r_{\Delta z}'\,\pi$$

einführt,

$$R_z = -\frac{4\,a^2\,z_2'}{g} \cdot V_{\Delta z}' \cdot \gamma$$

oder, wenn man die Differenzen $z_2' - z_1$ mit $\frac{4\,a^2\,z_2'}{g}$ multipliziert und $V_w' = \frac{4\,a^2\,z_2'}{g} \cdot V_{\Delta z}'$ setzt,

$$R_z = -\gamma . V_w' = -\gamma . F_w' . 2 r_{\Delta z}' \pi \ kg,$$

wobei

$$V_w' = F_w' . 2 r_{\Delta z}' \pi \ m^3$$

und

$$F_w' = \frac{4 a^2 z_2'}{g} . F_{\Delta z}' \ m^2 \text{ ist.}$$

Die achsiale Reaktion wirkt entlastend, sie ist nach aufwärts gerichtet.

R_z ist bei der üblichen Anordnung, bei welcher Schaufeln, Boden und Kranz ein Ganzes bilden, der hydrodynamische Teil des Zapfendruckes.

Die Punkte des Meridianes $B' B_1 B_1''$ wurden aus $B' B B''$ so erhalten wie die des Meridianes $A_1' A_1 A_1''$ aus $A' A A''$.

In Abb. 57 (Taf. VII) ist die Konstruktion für die Wasserrotationskörper $V_{\Delta z}$ und $V_{\Delta z}'$ durchgeführt; beide wurden in die Abb. 59 (Taf. VIII) übertragen und dort auch V_w und V_w' ermittelt, und zwar entspricht in Abb. 59

$$V_w \ldots\ldots F_w = A_I' A_I'' F'' B' A_I',$$
$$V_w' \ldots\ldots F_w' = A_I' A_I'' B_I'' B' A_I'.$$

Für unser Beispiel ergibt sich die Reaktion wegen des nahezu geradlinigen Verlaufes von $A_1' A_1''$ und $B' B_1''$ sehr einfach. Bestimmt man auf bekannte Weise den Schwerpunkt des Trapezes $A_I' A_I'' B_I'' B' A_I'$, so gibt die Abbildung den Schwerpunkthalbmesser $r_{\Delta z}' = 0{\cdot}230 \ m$;

$$F_w' = 0{\cdot}0566 \ m^2,$$
$$V_w' = F_w' . 2 r_{\Delta z}' \pi = 0{\cdot}082 \ m^3,$$
$$R_z = -\gamma . V_w' = -82 \ kg.$$

2. Der achsiale hydraulische Gesamtdruck P_Δ.

Wenden wir uns der Ermittlung der Größe

$$P_{\Delta h_r} = + \int \Delta p_r . 2 r \pi . d r$$

zu, so kann, da

$$\Delta p_r = \gamma . \Delta h_r$$

ist, auch geschrieben werden

$$P_{\Delta h_r} = \gamma . \int \Delta h_r . 2 r \pi . d r,$$

in welcher Gleichung mit Δh_r die Differenzen der Druckhöhen in kongruenten Parallelkreisen der inneren Laufradbegrenzungen bezeichnet sind.

Im vorhergehenden Abschnitte wurden diese Druckhöhen berechnet und in Abb. 59 (Tafel VIII) über den

zugehörigen Parallelkreisen aufgetragen, was den stark ausgezogenen Kurvenzug

$$A_1\, A_2\, B_2\, B_1\, A_1$$

ergab, dem unten entsprechend der Laufraddurchschnitt

$$A'\, A''\, B''\, B'\, A'$$

zugehört.

Bilden wir die Druckdifferenz

$$\left.\begin{aligned}\Delta h_r &= h' - h_1\\ &= h' - h''\\ &= h_2 - h''\end{aligned}\right\} \text{für zwei kongruente Parallelkreise zwischen} \left\{\begin{aligned}&r_1'' \text{ und } r_1',\\ &r_2' \text{ und } r_1'',\\ &r_2'' \text{ und } r_2',\end{aligned}\right.$$

so besteht jede dieser Differenzen aus zwei Teilen:

Unten ein positives Stück δz zwischen den Laufradbegrenzungen,

oben ein negatives Stück Δh zwischen den Kurvenzügen $A_1\, A_2\, B_2$ und $A_1\, B_1\, B_2$.

Es ist somit

$$\Delta h_r = \delta z - \Delta h;$$

mit $\gamma \,.\, 2\, r\, \pi\, d\, r$ multipliziert und integriert erhält man

$$P_{\Delta h_r} = \gamma \,.\int \Delta h_r \,.\, 2\, r\, \pi \,.\, d\, r = \gamma \,.\int_{r_2''}^{r_1'} \delta z \,.\, 2\, r\, \pi \,.\, d\, r\, -$$

$$-\, \gamma \,.\int_{r_2''}^{r_1'} \Delta h \,.\, 2\, r\, \pi \,.\, d\, r.$$

Der erste Ausdruck rechts ist das Gewicht G des Wassers im Rade.

$$\int_{r_2''}^{r_1'} \Delta h \,.\, 2\, r\, \pi \,.\, d\, r$$

stellt das Volumen V_Δ des Rotationskörpers vor, welcher entsteht, wenn

$$F_\Delta = A_1\, A_2\, B_2\, B_1\, A_1$$

(in Abb. 59, Tafel VIII stark ausgezogen) um die Turbinenachse rotiert.

Wird der Halbmesser des Schwerpunktes von F_Δ mit r_Δ bezeichnet, so ist

$$V_\Delta = F_\Delta \,.\, 2\, r_\Delta\, \pi\ m^3,$$

und

$$P_\Delta = -\,\gamma \,.\, V_\Delta = -\,\gamma \,.\int_{r_2''}^{r_1'} \Delta h \,.\, 2\, r\, \pi \,.\, d\, r\ kg$$

ist nichts anderes als der achsiale hydraulische Gesamtdruck (S. 133), welcher nach aufwärts gerichtet ist.[58])

---

[58]) $P_{\Delta h_r}$ und damit P_Δ kann auch rechnerisch ermittelt werden. Zu diesem Zwecke ist die oben angegebene Dreiteilung durchzuführen:

$$P_{\Delta h_r} = \gamma \,.\, \Big[\int_{r_2''}^{r_2'} (h_2 - h'') \,.\, 2\, r\, \pi \,.\, d r + \int_{r_2'}^{r_1''} (h' - h'') \,.\, 2\, r\, \pi \,.\, d\, r\, +$$

Für unsere Turbine ist:

$$F_\Delta = 0{\cdot}144 \ m^2,$$
$$r_\Delta = 0{\cdot}281 \ m,$$
$$V_\Delta = 0{\cdot}255 \ m^3,$$
$$P_\Delta = -255 \ kg.$$

$F_\Delta = A_1 A_2 B_2 B_1 A_1$ der Abb. 59 (Tafel VIII) entspricht den beiden $F_\Delta = A_\Delta' A_\Delta'' B_\Delta'' B_\Delta' A_\Delta'$ der Abb. 52 (Tafel VI), u. zw. der Lage nach der stark ausgezogenen nicht schraffierten Fläche.

3. Der achsiale Schaufeldruck Z^q.

Nach Gleichung 22) (S. 134) ist

$$R_z = P_\Delta + Z_q$$

und daraus

$$Z_q = R_z - P_\Delta.$$

Für unsere Turbine ist:

$$R_z = -82 \ kg,$$
$$P_\Delta = -255 \ kg;$$

daher

$$Z_q = +173 \ kg.$$

Der achsiale Schaufeldruck ist daher nach abwärts gerichtet.

(Bei der Turbine mit zylindrischen Schaufeln war $Z_q = 0$, S. 134).

$$+\int_{r_1''}^{r_1'} (h' - h_1) \, . \, 2 r \pi \, . \, d r \Big];$$

dann sind die Druckdifferenzen mit Hilfe der Gleichungen I), II) und III) zu bilden und als Funktionen von r darzustellen, was unschwer zu erreichen ist, da in den Hyperbelgleichungen

$$(w_n r) = b^2 r^2 - c^2 z^2$$

mit Hilfe der Gleichungen

$$\Psi' = a r^2 z,$$
$$\Psi'' = a r^2 z$$

z eliminiert werden kann. Auch die Integrationen sind einfach durchzuführen, aber die Ausdrücke erhalten eine solche Länge und erheischen zu ihrer Auswertung einen derartigen Aufwand an Ziffernrechnungen, daß für praktische Ermittlungen dieser Weg nicht zu empfehlen ist. Es wird daher von der Wiedergabe dieser Rechnung abgesehen.

In Abb. 59 (Tafel VIII) wurde $P_{\Delta h_r} = G + P_\Delta$ gebildet und die entsprechende Fläche $A_1 A_2 B_2 B A A_1$ horizontal schraffiert. Es ist jedoch nicht $P_{\Delta h_r}$, sondern P_Δ von Interesse, daher wurde im Texte auf diese Darstellung von $P_{\Delta h_r}$ nicht weiter eingegangen.

Wäre es möglich, die Schaufeln für sich mit der Welle zu verbinden, so wäre der hydrodynamische Teil des Zapfendruckes für diese Anordnung: $Z_q = +173\,kg$; P_Δ würde auf das Gehäuse übertragen, da die Kränze in diesem Falle Teile des Gehäuses bilden. Bei dieser Anordnung entfiele auch der hydrostatische Teil des Zapfendruckes.

b. Der hydrostatische Teil des Zapfendruckes.

Die hydrodynamische Einwirkung auf das Laufrad wurde im Vorhergehenden ermittelt. Es ist somit noch die Größe der hydrostatischen Last zu bestimmen. Diese wird abhängen von den Druckverhältnissen in den Räumen, welche das Laufrad umgeben. Es sind dies die Räume S_1, S_2, S_3 und der Saugraum (Abb. 58).

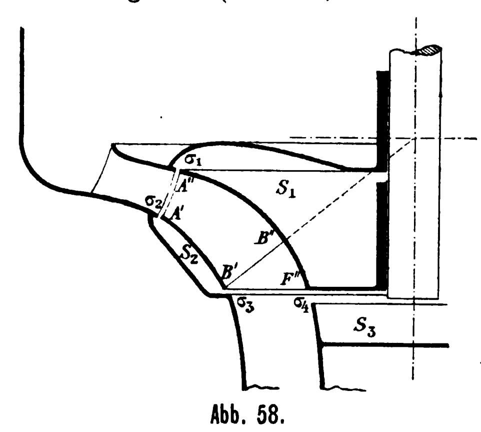


Abb. 58.

1. Die nicht entlastete Turbine.

(Abb. 60, Tafel VIII).

Denkt man zuerst an den Fall der größten Belastung, so wäre derselbe vorhanden, wenn das Laufrad keine Entlastungsöffnungen erhielte, der Raum S_1 somit durch den Kranzspalt σ_1 bloß mit dem Spaltraume in Verbindung wäre. Für S_1 ist dann maßgebend die Druckhöhe $h_1'' = \overline{A'' A_2}$ im Parallelkreise A'' (Abb. 60, Tafel VIII).

Nimmt man an, daß das Wasser in S_1 vom Rade mit der halben Winkelgeschwindigkeit desselben mitgenommen wird, so fällt von h_1'' der Druck nach einem Rotationsparaboloide ab, dessen Pfeilhöhe durch

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{u_1''^2}{2g}$$

gegeben ist, wenn mit u_1'' die Umfangsgeschwindigkeit im Parallelkreise A'' bezeichnet wird. In Abb. 60 (Taf. VIII)

ist der Meridian dieses Paraboloides eingezeichnet und mit $A_2\ A_i\ S_1$ beschrieben.

Ferner ist für den Fall des größten Druckes der Raum S_2 durch σ_3 gegen den Saugraum offen zu halten und durch Ausflußwiderstände in σ_2 der Spaltdruck in A' abzudrosseln; dann ist für S_2 maßgebend der Druck $h_2' = \overline{B' B_1}$ im Parallelkreise B'. Rotiert auch in S_2 das Wasser mit der halben Winkelgeschwindigkeit des Rades, so steigt von h_2' der Druck nach einem zu $A_2\ A_i\ S_1$ kongruenten mit $B_a\ B_1\ S_2$ bezeichneten Paraboloide an bis zum Zylinder vom Durchmesser $2\ r_1'$ (Parallelkreis A').

Nimmt man weiter an, daß auch im Raume S_3, welcher durch Spalt σ_4 mit dem Saugraume in Verbindung steht, das Wasser mit der halben Winkelgeschwindigkeit vom Laufrade mitgenommen wird, so fällt von der hier maßgebenden Druckhöhe $h'' = \overline{F'' F_2}$ im Parallelkreise F'' der Druck nach einem zu den früheren kongruenten Paraboloide $F_2\ F_i\ S_3$ ab. Sieht man von dieser Rotation ab, dann tritt an die Stelle des Paraboloides die horizontale Ebene $F_2\ F_e$.

Der die hydrostatische Last darstellende Druckkörper erscheint nunmehr völlig begrenzt. Nach abwärts wirkt das Gewicht eines Rotationskörpers, dessen Mittelschnitt von $A_1\ A_2\ A_i$ oben bis zur oberen Laufradbegrenzung und zum Meridiane der Eintrittsfläche, d. i. bis zum Linienzuge $A'\ A''\ B''\ F''\ F_0$ unten reicht. Nimmt man das G e w i c h t G d e s W a s s e r s i m R a d e aus Gleichung 21) (S. 133) hinzu, so ist der Mittelschnitt des den n a c h a b w ä r t s w i r k e n d e n D r u c k darstellenden Wasserrotationskörpers gegeben durch $A_1\ A_2\ A_i\ F_0\ F''\ B''\ B'\ A'\ A_1$.

Nach a u f w ä r t s wirkt das Gewicht des mit Wasser gefüllten Umdrehungskörpers $A'\ B'\ B''\ F''\ F_0\ F_i\ F_2\ B_2\ B_1\ B_a\ A'$ so daß nach a b w ä r t s w i r k e n d übrig bleibt das Gewicht des Wasserrotationskörpers $A_1\ A_2\ A_i\ F_i\ F_2\ B_2\ B_1\ B_a\ A_1$ (in Abb. 60, Tafel VIII, rechts ansteigend schraffiert).

D a s G e w i c h t d e s W a s s e r s i m R a d e f ä l l t h i n a u s, dieses ist seinem Auftriebe gleich.

Bezeichnet man den Rauminhalt des eben umgrenzten Rotationskörpers mit $V_{\Delta h_{sa}}$, so ist die h y d r o s t a t i s c h e L a s t:

$$P_{\Delta h_{sa}} = +\gamma \cdot V_{\Delta h_{sa}} = +\gamma \cdot \int_{r_w}^{r_1'} \Delta h_{sa} \,.\, 2 r \pi \, dr \ kg,$$

wenn mit $\Delta\, h_{sa}$ die hier maßgebenden Druckdifferenzen in den äußeren Laufradbegrenzungen bezeichnet werden; $2\, r_w$ ist der Wellendurchmesser (Fall a der Abb. 60, Tafel VIII).

$P_{\Delta h_{sa}}$ entspricht der Summe $P_1^{(1)} + P_2^{(2)}$ (S.16 u. S. 51) und der Größe P_{s1} (S. 141).

Es ergibt sich

$$P_{\Delta h_{sa}} = + 911\,kg.$$

2. Größte Entlastung.

(Abb. 60, Taf. VIII).

Will man den Spurzapfen entlasten, so wird man trachten, in S_1 den kleinsten, in S_2 aber den größten Druck zu erreichen (Abb. 58, S. 167). Drosselt man im Kranzspalte σ_1 den Spaltdruck h_1'' ab, und verbindet man den Raum S_1 am Orte der größten Umfangsgeschwindigkeit unmittelbar mit dem $U. W.$, so ist jetzt der für S_1 im Parallelkreise A'' maßgebende Druck gegeben durch die Höhe $\overline{A'' A_{II}}$ (Abb. 60, Taf. VIII). Versieht man außerdem die Oberseite des Laufrades mit Rippen, welche bis zur Begrenzung von S_1 reichen, so rotiert das Wasser in S_1 mit der Winkelgeschwindigkeit des Rades, der Druck fällt daher nach einem Rotationsparaboloide $A_{II}\, A_u\, \Sigma_1$, dessen Scheitel Σ_1 in der Tiefe

$$\frac{u_1''^2}{2\,g}$$

unter der Ebene $O\,O$ liegt. Seine Pfeilhöhe ist somit viermal so groß als jene des Paraboloides $A_2\, S_1$ des früher betrachteten Falles.

Das Gewicht des mit Wasser gefüllten Rotationskörpers $A_1\, A_2\, A_{II}\, A_u\, F_0\, F''\, B''\, B'\, A'\, A_1$ gibt den nach abwärts wirkenden Druck an, wenn gleich wieder das Gewicht G des Wassers im Rade mit einbezogen wird.

Geht man nun zu dem nach aufwärts wirkenden Drucke über, so ist im Sinne der beabsichtigten Entlastung der Kranzspalt σ_2 gegen S_2 zu öffnen und der Druck in S_2 durch Anordnung von Ausflußwiderständen im Spalte σ_3 zu halten. Maßgebend ist somit jetzt für S_2 der Spaltdruck im Parallelkreise A', d. i. $h_1' = \overline{A'\, A_1}$. Ordnet man am Gehäuse in S_2 Rippen an, um die Rotation des Wassers in S_2 zu verhindern, dann erfolgt die Druckverteilung in S_2 nach der horizontalen Ringebene $A_1\, B_0$. Wären diese nicht vorhanden, so würde der Druck von A_1 nach einem zu $A_2\, S_1$ kongruenten Paraboloide abfallen, von welchem der zwischen den Zylindern A_1 und B_0 liegende Ring zur Geltung kommen würde. Längs $B'\, B''\, F''\, F_0$ bleibt die Druckverteilung wie früher.

Es ist somit jetzt der nach aufwärts wirkende Druck gegeben durch das Gewicht des Wasserrotationskörpers $A'\, B'\, B''\, F''\, F_0\, F_i\, F_2\, B_2\, B_1\, B_0\, A_1\, A'$. Subtrahiert man diesen von dem nach abwärts wirkenden Druckkörper,

so bleibt der Rotationskörper mit dem **horizontal** schraffierten Mittelschnitte

$$A_1\, B_0\, B_1\, B_2\, F_2\, F_\text{i}\, A_\text{u}\, A_\text{II}\, A_2\, A_1$$

über. Da die Druckdifferenzen Δh_{sb} jetzt durchwegs negativ werden, so wird der durch das Gewicht dieses Körpers gegebene Druck auf den Spurzapfen **negativ**, und es ist somit

$$P_{\Delta h_{sb}} = -\gamma \cdot V_{\Delta h_{sb}} = -\gamma \cdot \int_{r_w}^{r_1'} \Delta h_{sb} \cdot 2\, r\, \pi\, dr\ kg,$$

die durch die angegebenen Vorkehrungen erzielte **Entlastung** des Spurzapfens, wenn mit $V_{\Delta h_{sb}}$ der Rauminhalt des oben beschriebenen horizontal schraffierten Rotationskörpers bezeichnet wird (Fall *b* der Abb. 60, Taf. VIII).

$P_{\Delta h_{sb}}$ entspricht der Summe $P_1^{(6)} + P_2^{(6)}$ (S. 48 u. S. 52) und der Größe P_{s2} (S. 142).

Es ergibt sich

$$P_{\Delta h_{sb}} = -577\ kg.$$

Betrachtet man jetzt die Abb. 59 und 60 (Taf. VIII) als zusammengehöriges Bild, so gibt die linke Hälfte in der achsialen Reaktion R_z ($A_\text{I}'\, A_\text{I}''\, B_\text{I}''\, B'$) den hydrodynamischen Teil des Zapfendruckes, während in der rechten Hälfte der hydrostatische Teil $P_{\Delta h_s}$ des Zapfendruckes erscheint, welcher herrührt von den Druckdifferenzen in den äußeren Laufradbegrenzungen, und gezeichnet ist für die beiden Grenzfälle des größten und des kleinsten Zapfendruckes.

Entlastungen sind horizontal, **Belastungen rechts ansteigend schraffiert.** Als statische Last käme noch die an der Welle hängende Saugsäule hinzu.

$R_z + P_{\Delta h_s}$ ist die Summe aus dem hydrodynamischen und aus dem hydrostatischen Teile des Zapfendruckes P, für dessen Zusammensetzung auch hier die Gleichung auf S. 69 gilt.

Jonval-Turbine.

Zugrunde gelegt wurde das von Prof. Lorenz gerechnete Beispiel[59]). Es gelten die auf S. 124 angegebenen Bezeichnungen.

Der Turbine entsprechen folgende Verhältnisse:

$$Q = 2{\cdot}0\ m^3/\text{Sek.},$$
$$H = 5{\cdot}0\ m,$$
$$n = 180.$$

Für die Flächen gleichen Arbeitsvermögens oder für die Energieniveauflächen gilt:

$$w_n r = B \cdot \text{logn} \cdot \frac{z}{z_0}{}^{59)},$$

für die Stromflächen:

$$\Psi = a r^2 z.$$

Die Druckverhältnisse sind in Abb. 61 (S.172) dargestellt. *OO* ist die 10 *m* über *U. W.* gelegte Atmosphärendruckebene. Der *U. W.*-Spiegel liegt 0·70 *m* über der *U. W.*-Grabensohle. In dieser ist die $+r$ — Achse anzunehmen. Für den Eintrittsquerschnitt ist $z_1 = 1{\cdot}25\,m$, für den Austrittsquerschnitt ist $z_2 = 1{\cdot}00\,m$. Im Maßstabe aufgetragen sind diejenigen Teile der absoluten Druckhöhen, welche über die Ebene *O O* zu liegen kommen, das heißt also immer die absolute Druckhöhe vermindert um $\left[\frac{w_0^2}{2g} + (h_a - H_u)\right]$, wobei übrigens $\frac{w_0^2}{2g}$ vernachlässigt wurde. Zur richtigen Bildung der Druckdifferenzen genügen diese Teile. Die Längen sind im fünffachen Maßstabe der Höhen aufgetragen.

Denkt man sich die Turbine unter ähnlichen Verhältnissen eingebaut wie die in Abb. 37 (Taf. V) dargestellte, so wäre hier im Saugrohre noch eine innere Führungsfläche in der Fortsetzung der Stromfläche Ψ'' anzuordnen, während man den äußeren Saugrohrmantel als Fortsetzung der Stromfläche Ψ' zu bilden hätte.

Der **hydrostatische Teil des Zapfendruckes** ergibt sich im Sinne der früheren Entwicklungen (S. 95), wie folgt:

Nach abwärts wirken die Gewichte der Rotationskörper (Abb. 61, S. 172):

$$A_1\,A_2\,A''\,A'\,A_1 + A'\,A''\,B''\,B'\,A' + B_1\,O_1\,A'\,B'\,B_1.$$

Nach aufwärts wirken die Gewichte der Rotationskörper: $B''\,B'\,B_1\,B_3\,B_2\,B'' + A''\,B''\,B_2\,O_2\,A''$.

Im Raume über $A'\,B'$ und unter $A''\,B''$ ändern sich die Druckhöhen längs dieser Kranzflächen rein statisch, wodurch die horizontale Begrenzung der Druckhöhen durch $B_1\,O_1$, bezw. durch $B_2\,O_2$ begründet ist.

Bildet man die Differenz der beiden Gewichtssummen, so erhält man die hydrostatische Last:

$$P_1 = +\gamma \cdot \underbrace{(\text{Vol. } A_1\,A_2\,O_2\,B_2\,A\,A_1)}_{V_1} - \gamma \cdot \underbrace{(\text{Vol. } A\,O_1\,B_1\,A)}_{V_1'} \quad kg$$

oder

$$\boldsymbol{P_1 = +\gamma \cdot (V_1 - V_1')} \quad \boldsymbol{kg.}$$

---

59) Lorenz, Neue Grundlagen der Turbinentheorie. „Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen“ 1905, S. 262, Heft 17.
Bezüglich der Wahl der beiden Funktionen

$$\Psi = F(r, z) \text{ und } w_n\,r = f\,(r, z)$$

vergleiche S. 122.

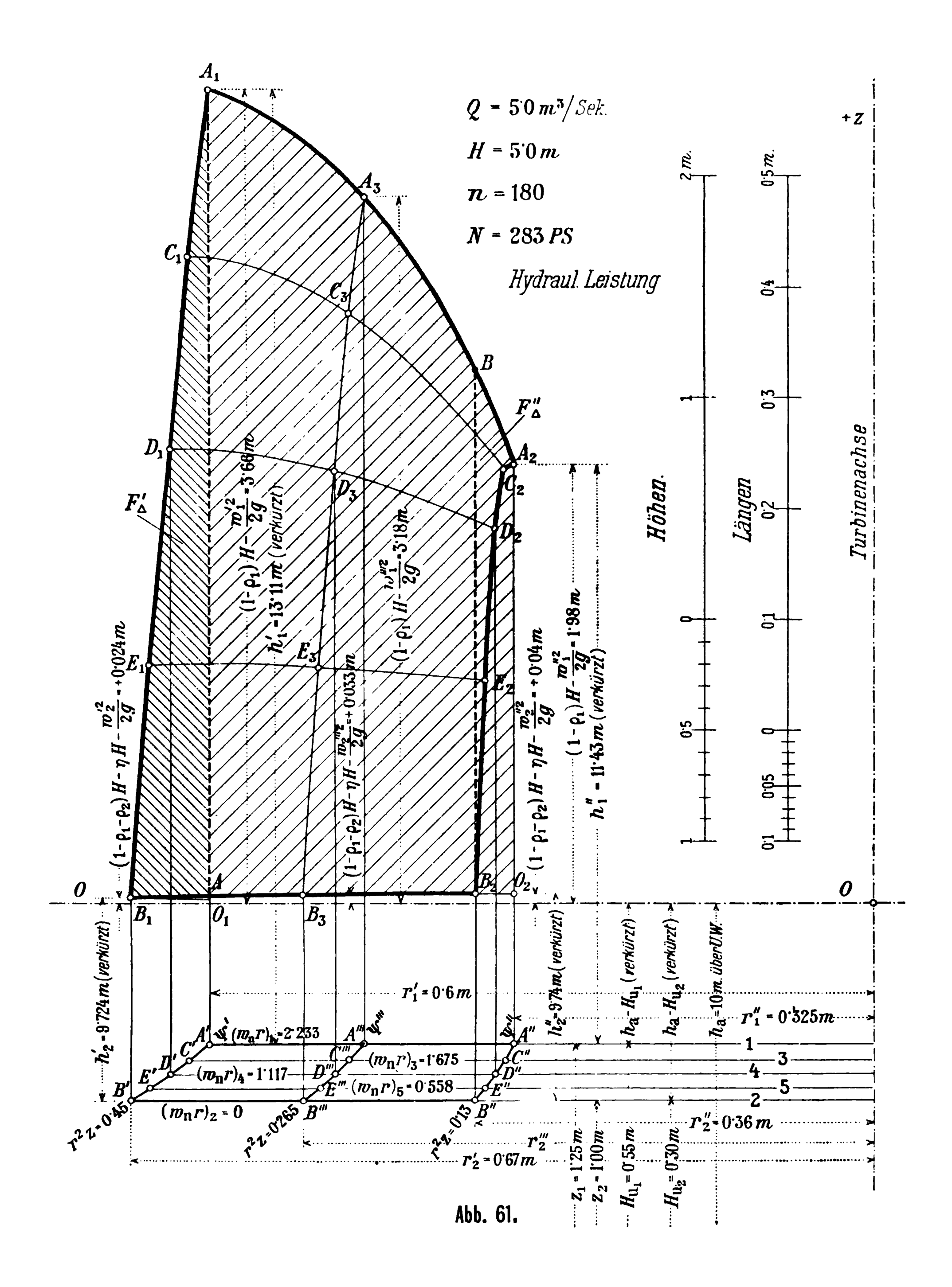

$Q = 5{\cdot}0\ m^3/Sek.$
$H = 5{\cdot}0\ m$
$n = 180$
$N = 283\ PS$
Hydraul. Leistung
Höhen
Längen
Turbinenachse

Abb. 61.

Der Schnitt von V_1 ist in Abb. 61 weit rechts ansteigend schraffiert.

Die Rauminhalte sind wieder aus den bezüglichen Flächen und den zugehörigen Halbmessern der Schwerpunktskreise derselben zu rechnen.

$V_1' =$ Vol. $A\,O_1\,B_1\,A$ ist übrigens verschwindend klein.

Vernachlässigt man dieses kleine V_1', so entspricht der Druckkörper

$A_1\,A_2\,O_2\,B_2\,A\,A_1$ der Abb. 61 dem Druckkörper $A\,B\,J\,H\,A$ der Abb. 37 (Tafel V), und es ist zu ersehen, daß man mit der Druckhöhe im mittleren Zylinderschnitte ziemlich genau arbeitet. Das Dreieck unter $A_1\,A_3$ bis zur Horizontalen durch A_3 ist zwar kleiner als das Dreieck über $A_3\,A_2$ bis zu derselben Horizontalen, aber der Schwerpunkthalbmesser des ersteren ist größer als der des letzteren. Es werden daher die Rauminhalte der durch Rotation der beiden Dreiecke um die Turbinenachse entstehenden Umdrehungskörper ziemlich gleich sein. $A\,B_2\,O_2$ fällt nahezu mit $O\,O$ zusammen.

Die **achsiale Reaktion R_z** ist in derselben Weise zu bilden wie bei der Francis-Turbine (S. 160). Berücksichtigt man, daß im vorliegenden Falle die positive z-Achse nach aufwärts gerichtet ist, so erhält man im Sinne der n e g a t i v e n z-Achse, d. h. nach abwärts,

$$R_z = + \frac{4\,a^2\,z_2}{g} \cdot \gamma \cdot V_{\Delta z}$$

mit $$V_{\Delta z} = \pi \cdot (r_2'^2 - r_2''^2) \cdot (z_1 - z_2)\ m^3.$$

In Abb. 62 (S. 174) ist der Mittelschnitt dieses Wasserringes mit $A_1'\,A_1''\,B''\,B'\,A_1'$ bezeichnet.

Multipliziert man auch hier $(z_1 - z_2)$ mit $\frac{4\,a^2\,z_2}{g}$, so entsteht ein neuer Rotationskörper über derselben Ringfläche, dessen Rauminhalt

$$V_w = \frac{4\,a^2\,z_2}{g} \cdot V_{\Delta z}\ m^3 \text{ ist.}$$

Sein Mittelschnitt wurde in Abb. 62 (S. 174) mit $A_I'\,A_I''\,B''\,B'\,A_I'$ bezeichnet und rechts ansteigend schraffiert. Es wird nunmehr auch:

$$R_z = + V_w \cdot \gamma \quad kg.$$

D i e R e a k t i o n v e r m e h r t h i e r d e n D r u c k a u f d e n S p u r z a p f e n.

Für das von Prof. L o r e n z gerechnete Beispiel ist:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a = -1 \\ z_2 = 1{\cdot}00 \end{array}\right\} \dfrac{4\,a^2\,z_2}{g} = 0{\cdot}408 \\ z_1 = 1{\cdot}25\,; \quad z_1 - z_2 = 0{\cdot}25 \end{array}\right\} \frac{4\,a^2\,z_2}{g} \cdot (z_1 - z_2) = 0{\cdot}102.$$

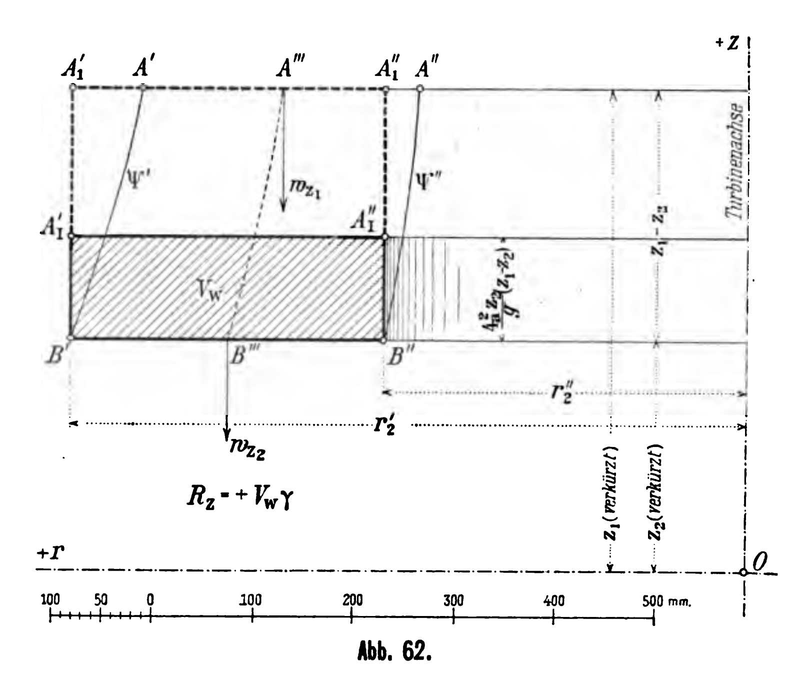


Abb. 62.

Es folgt daher mit $r_2' = 0{\cdot}67\,m$ und $r_2'' = 0{\cdot}36\,m$

$$V_w = 0{\cdot}102\,.\,(r_2'^2 - r_2''^2)\,.\,\pi = 0{\cdot}1023\,m^3,$$
$$R_z = +\,1000\,.\,V_w = +\,102\,kg$$

für eine Turbine von $N = 283\,PS$ hydraulischer Leistung, ein recht kleiner Wert. Auf den geringen Einfluß der Reaktion auf den Zapfendruck wurde bereits früher hingewiesen.

Die Zusammensetzung des Druckes auf den Spurzapfen ist in der gleichen Weise wie früher vorzunehmen [Gleichung 5), S. 103].

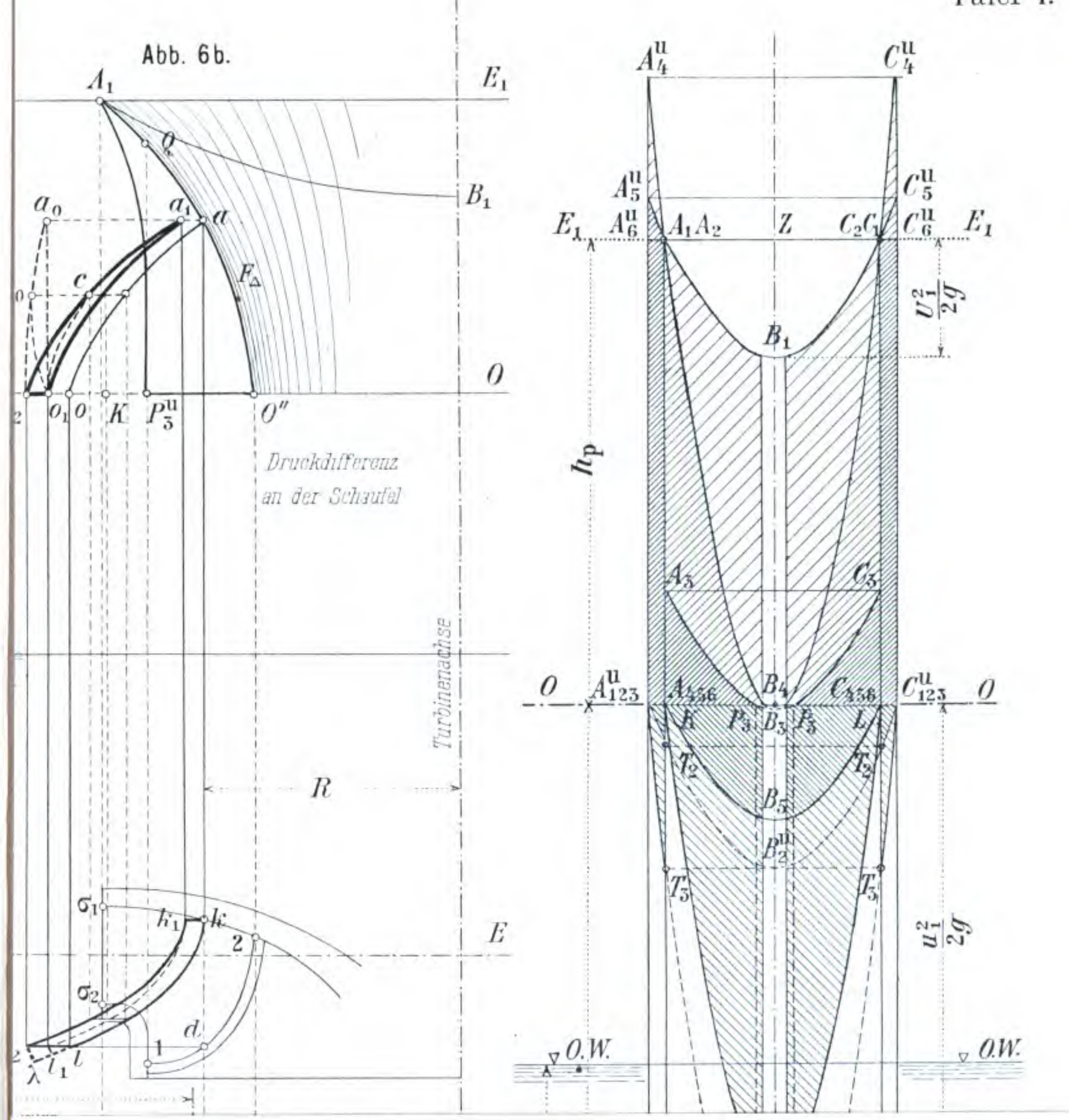
Die Strömungsverhältnisse im Saugrohr können unmittelbar nach Prof. Prašil[60]) verfolgt werden. Sie würden zu einem Bilde führen ähnlich jenem, welches in der unten angeführten Arbeit gegeben ist. Zur Geltung kämen die zwischen den fortgesetzten Stromflächen Ψ' und Ψ'' liegenden Teile, wobei die letztere den Mantel des inneren Führungskörpers bilden würde.

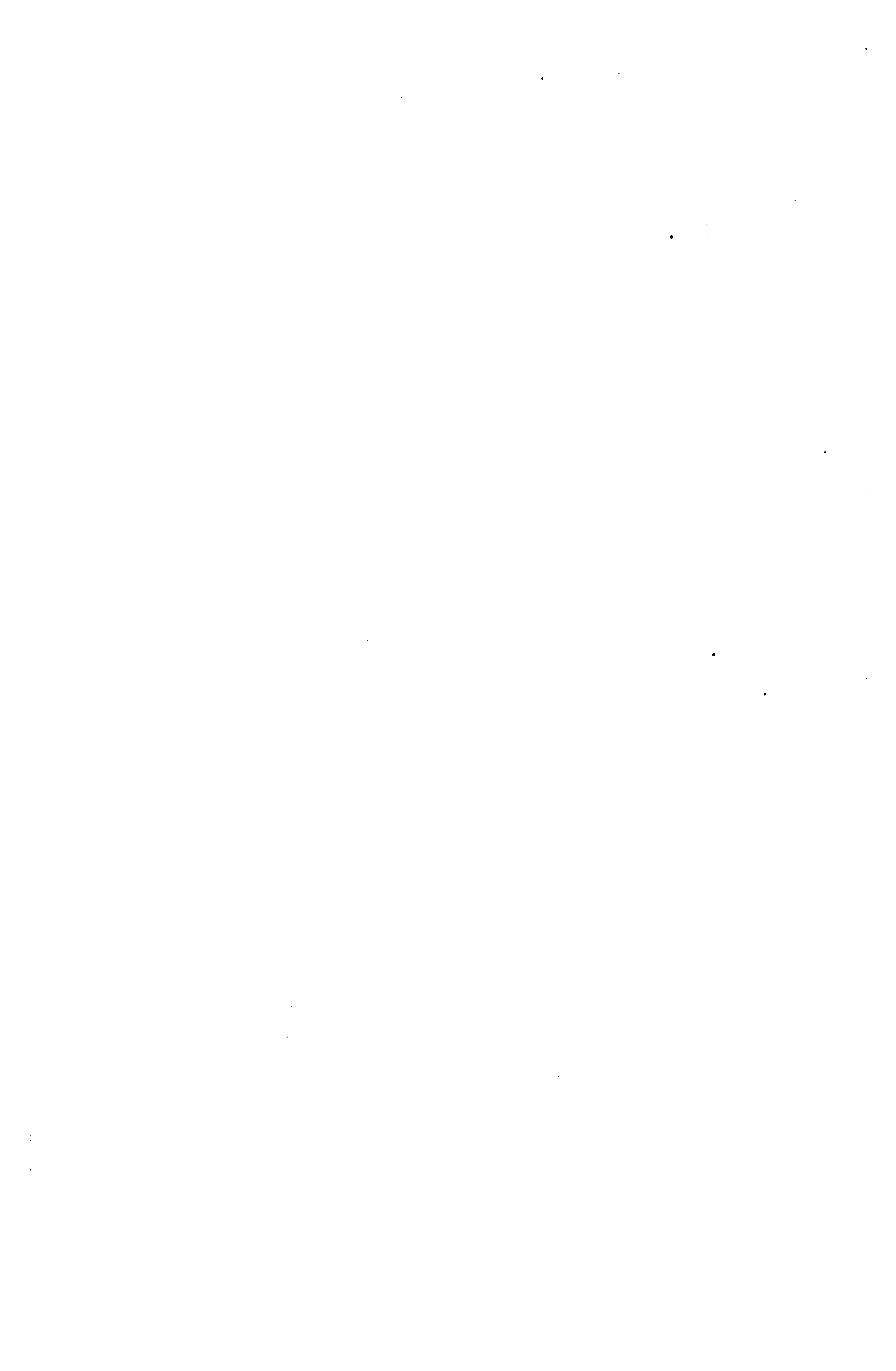
---

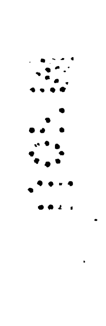
60) Prašil, „Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen", „Schweiz. Bauzeitung" 1903, Bd. 41.

Druck von R. Spies & Co., Wien.

Tafel I.







A

H

E

Tafel VI.

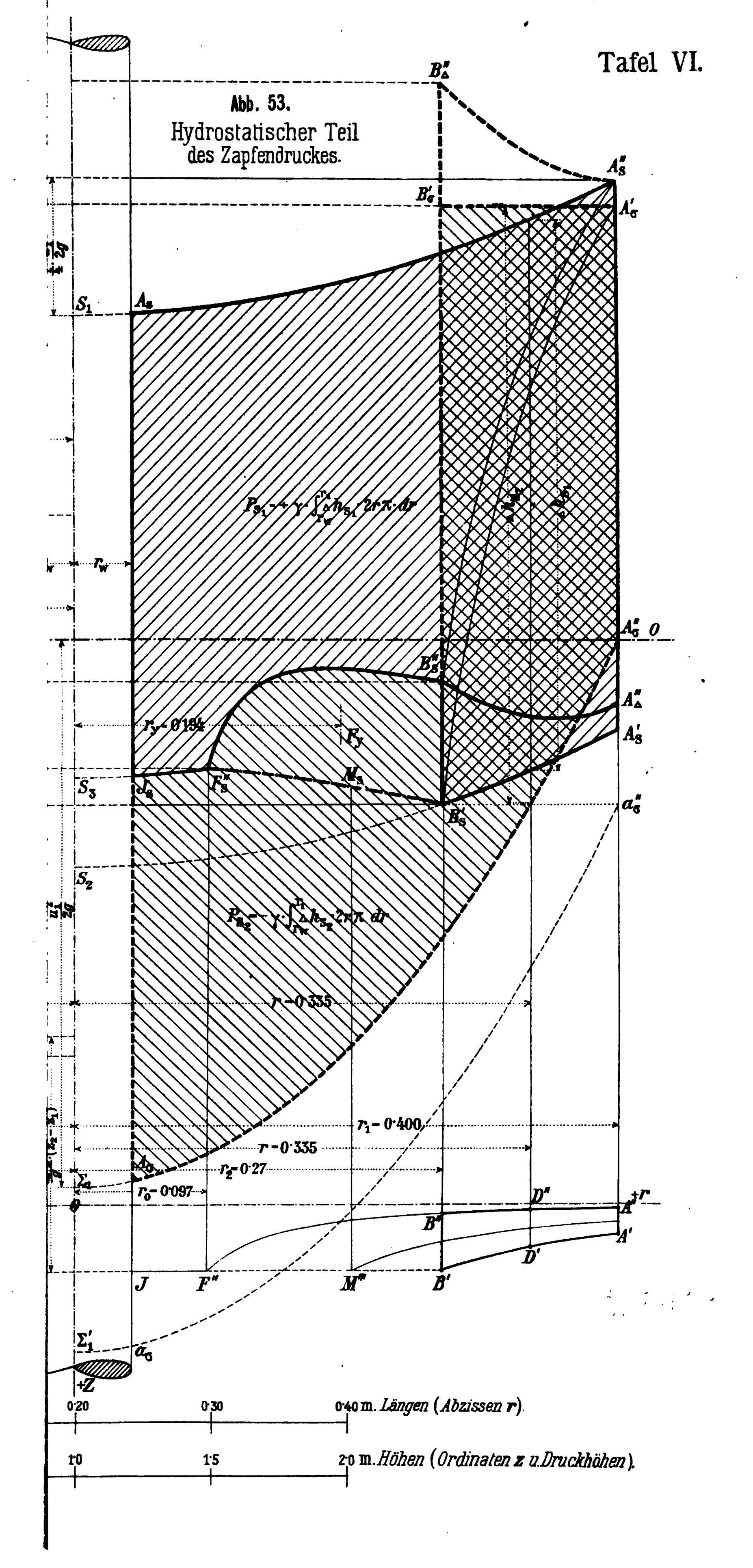


Abb. 53.
Hydrostatischer Teil
des Zapfendruckes.

$$P_{s_1} = +\gamma \cdot \int_{r_w}^{r_1} \Delta h_{s_1} \cdot 2r\pi \cdot dr$$

$$P_{s_2} = -\gamma \cdot \int_{r_w}^{r_1} \Delta h_{s_2} \cdot 2r\pi \cdot dr$$

